МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики
Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права

Лукашин Ю.П.

«ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА»

Москва 2003

УДК 336
ББК 65.261
Л 84

Лукашин Ю.П. Финансовая математика / Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права. -М., 2003. - 81 с.

В учебном пособии рассмотрены методы начисления простых, сложных и непрерывных процентов, методы наращения и дисконтирования по учетным ставкам, приводятся расчетные примеры, практические приложения.

В учебном пособии предполагается, что читателю уже известны методы начисления простых, сложных и непрерывных процентов, методы наращения и дисконтирования по учетным ставкам, приводятся формулы расчета различных параметров регулярных потоков платежей (финансовых рент), конкретные примеры, практические приложения.

Содержание

ЧАСТЬ I. ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Введение

Любая финансовая, кредитная или коммерческая операция предполагает совокупность условий, согласованных ее участниками. К таким условиям относятся: сумма кредита, займа или инвестиций, цена товара, сроки, способы начисления процентов и погашения долга и т.д.

Совместное влияние на финансовую операцию многих факторов делает конечный ее результат неочевидным. Для его оценивания необходим специальный количественный анализ. Совокупность методов расчета и составляет предмет курса, который можно назвать «Финансовые и коммерческие расчеты», «Финансовая математика», «Высшие финансовые вычисления». В курсе рассматриваются финансовые вычисления, необходимые для анализа сделок, включающих три основных элемента - размер платежа, срок и ставку процентов.

Количественный финансовый анализ имеет целью решение широкого круга задач от элементарного начисления процентов до анализа сложных инвестиционных, кредитных и коммерческих операций. К этому кругу задач можно отнести:

- измерение конечных финансовых результатов операции для каждой из участвующих в ней сторон;
- сравнение эффективности различных операций;
- выявление зависимости конечных результатов от основных параметров операции, сделки, контракта;
- разработка планов выполнения финансовых операций;
- расчет параметров эквивалентного изменения условий контракта.

Данное пособие предполагает систематизированное изложение основных понятий и методов финансовых вычислений и является введением в финансовую математику.

В пособии рассматриваются основные понятия, которыми оперируют в финансовых вычислениях, такие как процент, ставка процента, учетная ставка, современная (текущая) стоимость платежа и т.д., методы наращения и дисконтирования платежей, принципы, лежащие в основе финансовых вычислений, современная практика расчетов.

Настоящее пособие охватывает первую часть курса, состоящего из двух дисциплин: «Основы финансовых расчетов» и «Анализ финансовых потоков».

В «Анализе финансовых потоков» будут даны основы количественного анализа последовательности (потоков) платежей, в частности, - финансовых рент (аннуитетов). Потоки денежных платежей часто встречаются в практике. Например, регулярные взносы для формирования какого-либо фонда (инвестиционного, страхового, пенсионного, для погашения долга), периодическая уплата процентов, доходы по облигациям или ценным бумагам, выплата пенсий, поступление доходов от коммерческой или предпринимательской деятельности, налоговые платежи и т.д. Полнее с методами расчетов, разработанными для анализа различных видов финансовых рент (в том числе с переменными размерами платежей), можно познакомиться в специальной литературе и, в частности, в книге Е.М.Четыркина, указанной в разделе «Литература». Такие методы имеют важное значение в практике финансовых расчетов и позволяют определить как обобщающие характеристики рент (наращенную сумму, текущую стоимость), так и отдельные их параметры.

Материал пособия имеет общий характер и может быть применен в расчетах часто встречающихся на практике финансовых операций: расчете кредитных и коммерческих операций, эффективности предпринимательской деятельности.

«ОСНОВЫ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ»

Тематический план

Наименование Разделов и тем	***Всего Часов***	***Аудиторные занятия (лекции и практические)***
1	**2**	**3**
Тема 1. Введение. Содержание курса	2	2
Раздел I. Начисление простых процентов		
Тема 2. Простые проценты и процентные ставки, практика начисления простых процентов. Дисконтирование и учет по простым ставкам. Примеры.	14	10+4
Раздел II. Начисление сложных процентов		
Тема 3. Сложные проценты. Ставка сложных процентов. Формула наращения по сложным процентам. Виды сложных ставок.	8	6+2
Тема 4. Непрерывные проценты. Сила роста. Наращение и дисконтирование.	2	2
Тема 5. Эквивалентность процентных ставок.	6	4+2
ВСЕГО:	32	32

Содержание тем

Тема 1. *Введение. Содержание курса*

Время как фактор стоимости в финансовых и коммерческих расчетах и его учет с помощью процентных ставок. Цели, задачи, литература.

Раздел I. Начисление простых процентов

Тема 2. *Простые проценты*

Простые проценты и процентные ставки (ставка процента и учетная ставка). Формула наращения по простым процентам. Практика начисления простых процентов. Простые переменные ставки. Реинвестирование по простым процентам. Дисконтирование и учет по простым ставкам. Сопоставление ставки наращения и учетной ставки. Примеры, задачи.

Приложения:

Конвертация валюты и начисление простых процентов. Расчет доходности операций с двойной конвертацией. Определение критических точек. Движение денежных средств на расчетном счете и банковская практика расчета процентов. Определение суммы, выдаваемой при закрытии счета.

Методы расчетов при погашении краткосрочной задолженности частичными платежами (актуарный метод и метод торговца).

Сопоставление процентных ставок при различных условиях контрактов. Объявленная ставка и реальная доходность кредитора в потребительском кредите.

Раздел II. Начисление сложных процентов

Тема 3. *Сложные проценты*

Ставка сложных процентов. Формула наращения по сложным процентам**.** Сравнение наращенных величин при применении ставок простых и сложных процентов для различных периодов времени. Формула наращения по сложным процентам, когда ставка меняется во времени. Формула удвоения суммы. Три метода начисления процентов при дробном числе лет. Номинальная и эффективная ставки процентов. Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов и сложной учетной ставке. Номинальная и эффективная учетные ставки процентов. Примеры, задачи.

Приложения: Конвертация валюты и начисление сложных процентов. Расчет доходности. Определение критических точек. Расчеты простых и сложных процентов в условиях инфляции (брутто-ставки и ставки реального наращения). Учет налогов. Расчет средней ставки (доходности) за период в случае переменных ставок простых и сложных процентов. Расчет средней ставки при одновременном участии в нескольких операциях с разными условиями. Расчет срока ссуды и процентных ставок. Примеры.

Тема 4. *Непрерывные проценты*

Сила роста. Наращение и дисконтирование. Рассмотрение частного случая, когда сила роста меняется скачком. Вывод формулы для произвольного закона изменения силы роста. Связь дискретных и непрерывных процентных ставок.

Тема 5. *Эквивалентность процентных ста*вок

Формулы, устанавливающие эквивалентность между различными видами ставок. Конверсия платежей, изменение условий контрактов. Примеры, задачи. Форвардная процентная ставка, теории временной структуры процентных ставок. Кривая доходности.

Раздел I. Начисление простых процентов

1.1 Простые проценты

Время как фактор в финансовых и коммерческих расчетах

В практических финансовых и коммерческих операциях суммы денег обязательно связываются с некоторыми конкретными моментами или интервалами времени. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность поступлений денежных средств или их выплат.

Фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета фактора времени определяется **принципом неравноценности** *денег*, относящихся к разным моментам времени. Дело в том, что даже в условиях отсутствия инфляции и риска 1 млн. руб., полученных через год, не равноценен этой же сумме, поступившей сегодня. Неравноценность определяется тем, что теоретически любая сумма денег может быть инвестирована и принести доход. Поступившие доходы в свою очередь могут быть реинвестированы и т.д. Следовательно, сегодняшние деньги в этом смысле ценнее будущих, а будущие поступления менее ценны, чем современные.

Очевидным следствием принципа «неравноценности» является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени. Подобного рода суммирование допустимо лишь там, где фактор времени не имеет значения - например, в бухучете для получения итогов по периодам и в финансовом контроле.

В финансовых вычислениях фактор времени обязательно учитывается в качестве одного из важнейших элементов. Его учет осуществляется с помощью начисления процентов.

Проценты и процентные ставки

Под **процентными деньгами** или, кратко, *процентами* в финансовых расчетах понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой форме: в виде выдачи денежной ссуды, продажи в кредит, помещении денег на сберегательный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигаций и т.д.

В какой бы форме не выступали проценты, это всегда конкретное проявление такой экономической категории, как ссудный процент.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере **процентной ставки** - отношения суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды. Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называют **периодом**

начисления. Ставка измеряется в процентах, в виде десятичной или натуральной дроби. В последнем случае она фиксируется в контрактах с точностью до 1/16 или даже 1/32.

Начисление процентов, как правило, производится дискретно, т.е. в отдельные (обычно равноотстоящие) моменты времени (**дискретные проценты**), причем, в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц. Иногда практикуют ежедневное начисление, а в ряде случаев удобно применять **непрерывные проценты**.

Проценты либо выплачиваются кредитору по мере их начисления, либо присоединяются к сумме долга. Процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют **наращением** или **ростом** первоначальной суммы.

В количественном финансовом анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращения суммы долга, но и в более широком смысле - как измеритель степени доходности (эффективности) финансовой операции или коммерческо-хозяйственной деятельности.

В практике существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно применяют различные виды процентных ставок. Одно из основных отличий связано с выбором исходной базы (суммы) для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются *простыми*, а во втором - **сложными процентными ставками**.

Процентные ставки, указываемые в контрактах, могут быть *постоянными* или **переменными** *(«***плавающими***»)*. Плавающие ставки часто применяются во внешнеэкономических операциях. В этом случае значение ставки равно сумме некоторой изменяющейся во времени базовой величины и надбавки к ней (**маржи**). Примером базовой ставки может служить лондонская межбанковская ставка ЛИБОР (LIBOR - London interbank offered rate) или московская межбанковская ставка МИБОР. Размер маржи определяется целым рядом условий (сроком операции и т.д.). Судя по мировой практике, он обычно находится в пределах 0,5-5%. В контракте может использоваться и переменный во времени размер маржи.

Теперь мы рассмотрим методы анализа сделок, в которых предусматриваются разовые платежи при выдаче и погашении кредита или депозита. Задачи такого анализа сводятся к расчету наращенной суммы, суммы процентов и размера дисконта, современной величины (текущей стоимости) платежа, который будет произведен в будущем.

Формула наращения по простым процентам

Под **наращенной суммой** ссуды (долга, депозита, других видов инвестированных средств) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Пусть P первоначальная сумма денег, i - ставка простых процентов. Начисленные проценты за один период равны Pi, а за n периодов - Pni.

Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами описывается арифметической прогрессией, членами которой являются величины

$P,\ P+Pi=P(1+i),\ P(1+i)+Pi=P(1+2i)$ и т.д. до $P(1+ni)$.

Первый член этой прогрессии равен P, разность Pi, а последний член определяемый как

$$S=P(1+ni) \qquad (1)$$

и является наращенной суммой. Формула (1) называется **формулой наращения по простым процентам** или, кратко, формулой простых процентов. Множитель $(1+ni)$ является **множителем наращения**. Он показывает во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы. Наращенную сумму можно представить в виде двух слагаемых: первоначальной суммы P и суммы процентов I

$$S=P+I, \qquad (2)$$

где

$$I=Pni. \qquad (3)$$

Процесс роста суммы долга по простым процентам легко представить графически (см. *Рис. 1*). При начислении простых процентов по ставке i за базу берется первоначальная сумма долга. Наращенная сумма S растет линейно от времени.

Пример 1.

Определим проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 100000 руб., срок долга 1,5 года при ставке простых процентов, равной 15% годовых.

I=100000 •1,5 •0,15=22500 руб. - проценты за 1,5 года

S=100000+22500=122500 руб. - наращенная сумма.

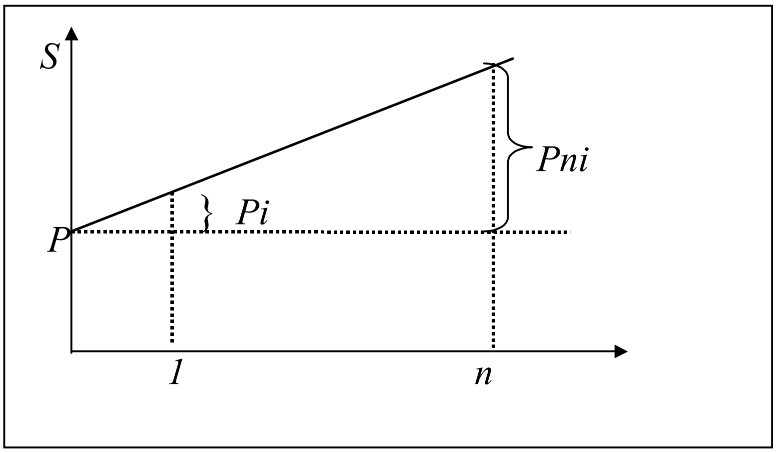


Рис. 1. Наращение по простой процентной ставке

Практика начисления простых процентов

Начисление простых процентов обычно используется в двух случаях: (1) при заключении краткосрочных контрактов (предоставлении краткосрочных кредитов и т.п.), срок которых не превышает года ($n \le 1$); (2) когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются.

Ставка процентов обычно устанавливается в расчете за год, поэтому при продолжительности ссуды менее года необходимо выяснить какая часть процента уплачивается кредитору. Для этого величину n выражают в виде дроби

$n=t/K$, где

n - срок ссуды (измеренный в долях года),

K - число дней в году (временная база),

t - срок операции (ссуды) в днях.

Здесь возможно несколько вариантов расчета процентов, различающихся выбором временной базы K и способом измерения срока пользования ссудой.

Часто за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом). В этом случае говорят, что вычисляют **обыкновенный** или **коммерческий процент**. В отличие от него **точный процент** получают, когда за базу берут действительное число дней в году: 365 или 366.

Определение числа дней пользования ссудой также может быть **точным** или **приближенным**. В первом случае вычисляют фактическое число дней между двумя датами, во втором - продолжительность ссуды определяется числом месяцев и дней ссуды, приближенно считая все месяцы равными, содержащими по 30 дней. В обоих случаях дата выдачи и дата погашения долга считается за один день. Подсчет точного числа дней между двумя датами можно осуществить на компьютере, взяв разность этих дат, или с помощью специальной таблицы, в которой представлены порядковые номера дат в году.

Комбинируя различные варианты временной базы и методов подсчета дней ссуды, получаем три варианта расчета процентов, применяемые в практике:

(1) точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365) - британский;

(2) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (365/360) - французский;

(3) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360) - германский.

Вариант расчета с точными процентами и приближенным измерением времени ссуды не применяется.

Простые переменные ставки

Как известно, процентные ставки не остаются неизменными во времени, поэтому в кредитных соглашениях иногда предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. В этом случае формула расчета наращенной суммы принимает следующий вид

$$S = P(1+n_1i_1+n_2i_2+...) = P(1+\Sigma n_ti_t), \qquad (4)$$

где

P - первоначальная сумма (ссуда),

i_t - ставка простых процентов в периоде с номером t,

n_t - продолжительность периода t - периода начисления по ставке i_t.

Пример 2.

Пусть в договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 10% годовых, а на каждый последующий на 1% меньше, чем в предыдущий. Определим множитель наращения за весь срок договора.

$$1+\Sigma n_ti_t = 1+0,25\bullet 0,10+0,25\bullet 0,09+025\bullet 0,08+0,25\bullet 0,07 = 1,085$$

Реинвестирование по простым процентам

Сумма депозита, полученная в конце обозначенного периода вместе с начисленными на нее процентами, может быть вновь инвестирована, хотя, скорее всего, и под другую процентную ставку, и этот процесс **реинвестирования** иногда повторяется неоднократно в пределах расчетного срока N. Тогда в случае многократного инвестирования в краткосрочные депозиты и применения простой процентной ставки наращенная сумма для всего срока N вычисляется находится по формуле

$$S = P(1+n_1 i_1)(1+n_2 i_2) \cdots = P\prod_{t=1}^{m}(1+n_t i_t), \qquad (5)$$

где

$n_1, n_2,..., n_m$ - продолжительности последовательных периодов реинвестирования,

$N = \sum_{t=1}^{m} n_t$,

$i_1, i_2,..., i_m$ - ставки, по которым производится реинвестирование.

Дисконтирование и учет по простым ставкам

В практике часто приходится решать задачу обратную наращению процентов, когда по заданной сумме S, соответствующей концу финансовой операции, требуется найти исходную сумму P. Расчет P по S называется **дисконтированием** суммы S. Величину P, найденную дисконтированием, называют **современной величиной** (**текущей стоимостью**) суммы S. Проценты в виде разности $D=S-P$ называются **дисконтом** или **скидкой**. Процесс начисления и удержания процентов вперед (в виде дисконта) называют **учетом**. Дисконт как скидка с конечной суммы долга может определяться через процентную ставку или в виде абсолютной величины.

Таким образом, в практике используются два принципа расчета процентов: (1) путем наращения суммы ссуды и (2) устанавливая скидку с конечной суммы долга.

В большинстве случаев фактор времени учитывается в финансовых контрактах именно с помощью дисконтирования. Величина P эквивалентна сумме S в том смысле, что через определенный период времени и при заданной ставке процентов она в результате наращения станет равной S. Поэтому операцию дисконтирования называют также приведением. Но понятие приведения шире, чем дисконтирование. **Приведение** - это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то - наращение.

Известны два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет.

Математическое дисконтирование. Этот вид дисконтирования представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды. Если в прямой задаче

$$S=P(1+ni),$$

то в обратной

$$P = S\frac{1}{1+ni}. \qquad (6)$$

Дробь в правой части равенства при величине S называется **дисконтным множителем**. Этот множитель показывает какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга. Дисконт суммы S равен

$$D=S-P. \qquad (7)$$

Банковский или коммерческий учет. Операция учета (учета векселей) заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Для расчета процентов при учете векселей применяется **учетная ставка**, которую мы обозначим символом d.

По определению, простая годовая учетная ставка находится как

$$d = \frac{S-P}{Sn}. \qquad (8)$$

Размер дисконта или учета, удерживаемого банком, равен

$$D=Snd, \qquad (9)$$

откуда

$$P=S-D=S-Snd=S(1-nd). \qquad (10)$$

Множитель $(1-nd)$ называется дисконтным множителем. Срок n измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах. Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням.

Наращение по учетной ставке. Учетная ставка может использоваться для наращения, т.е. для расчета S по P. В этом случае из формулы (10) следует, что

$$S = P\frac{1}{1-nd}. \qquad (11)$$

Сравнение ставки наращения и учетной ставки. Операции наращения и дисконтирования по своей сути противоположны, но ставка наращения и учетная ставка могут использоваться для решения обеих задач. В этом случае, в зависимости от применяемой ставки, можно различать прямую и обратную задачи.

Прямая и обратная задачи

Ставка	Прямая задача	Обратная задача
наращения *I*	наращение: $S=P(1+ni)$	Дисконтирование: $P=S/(1+ni)$
учетная *d*	дисконтирование: $P=S(1-nd)$	Наращение: $S=P/(1-nd)$

Совмещение начисления процентов по ставке наращения и дисконтирования по учетной ставке. В том случае, когда учету подлежит долговое обязательство, предусматривающее начисление простых процентов на первоначальную сумму долга, необходимо решить две задачи: (1) определить конечную сумму долга на момент его погашения; (2) рассчитать сумму, получаемую при учете, путем дисконтирования конечной суммы долга, применяя учетную ставку, действующую в момент учета.

Решение двух этих задач можно записать в виде одной формулы, содержащей наращение по ставке простых процентов, фигурирующей в долговом обязательстве, и дисконтирование по учетной ставке:

$$P_2=P_1(1+n_1i)(1-n_2d),$$

где

P_1 - первоначальная сумма ссуды,

P_2 - сумма, получаемая при учете обязательства,

n_1 - общий срок платежного обязательства, в течение которого начисляются проценты,

n_2 - срок от момента учета до погашения долга.

Пример 3.

Платежное обязательство уплатить через 100 дней 2 млн. руб. с процентами, начисляемыми по ставке простых процентов i=20% годовых, было учтено за 40 дней до срока погашения по учетной ставке d=15%. Требуется определить сумму, получаемую при учете.

Решение.

$$P_2 = 2(1+\frac{100}{365}0{,}2)(1-\frac{40}{360}0{,}15) = 2{,}074 \text{ млн. руб.}$$

Отметим, что при наращении здесь использовалась временная база 365 дней, а при дисконтировании - 360.

Определение продолжительности ссуды. Иногда задача ставится таким образом, что требуется найти временной интервал, за который исходная сумма при заданной ставке процентов вырастет до нужной величины, или срок, обеспечивающий определенный дисконт с заданной величины. Другими словами, речь идет о решении формул (1) и (10) относительно n.

При использовании простой ставки наращения i из (1) получаем

$$n = \frac{S-P}{Pi}, \qquad (12)$$

а при учетной ставке d из (10) имеем

$$n = \frac{S-P}{Sd}. \qquad (13)$$

Формулы (12) и (13) дают срок, измеряемый в годах, но простые ставки в основном используются в краткосрочных операциях, когда срок исчисляется днями. В этом случае срок финансовой операции в днях выражается как

$$t=nK, \qquad (14)$$

где K - временная база.

Определение уровня процентной ставки. Уровень процентной ставки может служить мерой доходности операции, критерием сопоставления альтернатив и выбора наиболее выгодных условий. Из тех же формул (1) и (10) получаем ставку наращения i и учетную ставку d

$$i = \frac{S-P}{Pn} = \frac{S-P}{Pt}K, \qquad (15)$$

$$d = \frac{S-P}{Sn} = \frac{S-P}{St}K, \qquad (16)$$

где использовалось соотношение (14). Напомним, что срок n в двух формулах имеет разный смысл: в первом случае это весь срок операции, а во втором - оставшийся срок до погашения.

Пример 4.

Определить доходность операции для кредитора, если им предоставлена ссуда в размере 2 млн. руб. на 100 дней и контракт предусматривает сумму погашения долга 2,5 млн. руб. Доходность выразить в виде простой ставки процентов i и учетной ставки d. Временную базу принять равной K=360 дней.

Решение.

$$i = \frac{S-P}{Pt}K = \frac{2{,}5-2}{2\cdot 100}360 = 0{,}9, \text{ т.е. } 90\%,$$

$$d = \frac{S-P}{St}K = \frac{2{,}5-2}{2{,}5\cdot 100}360 = 0{,}72, \quad \text{т.е. } 72\%.$$

Иногда размер дисконта в контрактах фиксируется за весь срок ссуды в виде доли (или процента) от суммы погасительного платежа. Таким образом, уровень процентной ставки здесь задается в неявном виде. Но нетрудно вывести формулы, с помощью которых значения этих ставок можно вычислить.

Пусть S - размер погасительного платежа, d_n - доля этого платежа, определяющая величину дисконта за весь срок ссуды n. Требуется определить каким уровням годовых ставок i и d эквивалентны такие условия.

Итак, S - сумма возврата в конце срока ссуды, $P=S(1-d_n)$ - реально выдаваемая ссуда в момент заключения договора.

$$i = \frac{S-P}{Pn} = \frac{S-S(1-d_n)}{S(1-d_n)n} = \frac{d_n}{(1-d_n)n}, \tag{17}$$

$$d = \frac{S-P}{Sn} = \frac{S-S(1-d_n)}{Sn} = \frac{d_n}{n}. \tag{18}$$

Пример 5.

Кредитор и заемщик договорились, что из суммы кредита, выданного на 200 дней, сразу удерживается дисконт в размере 25% указанной суммы. Требуется определить цену кредита в виде простой годовой учетной ставки d и годовой ставки простых процентов i. Считать временную базу K равной 365 дням.

Решение.

$$d = \frac{d_n}{n} = \frac{0{,}25}{200/365} = 0{,}45625, \text{ т.е. } 45{,}625\%,$$

$$i = \frac{d_n}{(1-d_n)n} = \frac{0{,}25}{(1-0{,}25)200/365} = 0{,}60833, \text{ т.е. } 60{,}833\%.$$

Раздел II. Начисление сложных процентов

2.1 Сложные проценты

Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, часто называют **капитализацией** процентов.

Формула наращения по сложным процентам

Пусть первоначальная сумма долга равна P, тогда через один год сумма долга с присоединенными процентами составит $P(1+i)$, через 2 года $P(1+i)(1+i)=P(1+i)^2$, через n лет - $P(1+i)^n$. Таким образом, получаем формулу наращения для сложных процентов

$$S=P(1+i)^n, \qquad (19)$$

где S - наращенная сумма, i - годовая ставка сложных процентов, n - срок ссуды, $(1+i)^n$ - множитель наращения.

В практических расчетах в основном применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т.д.). Наращение по сложным процентам представляет собой рост по закону геометрической прогрессии, первый член которой равен P, а знаменатель $(1+i)$.

Отметим, что при сроке $n<1$ наращение по простым процентам дает больший результат, чем по сложным, а при $n>1$ - наоборот. В этом нетрудно убедиться на конкретных числовых примерах. Наибольшее превышение суммы, наращенной по простым процентам, над суммой, наращенной по сложным процентам, (при одинаковых процентных ставках) достигается в средней части периода.

Формула наращения по сложным процентам, когда ставка меняется во времени

В том случае, когда ставка сложных процентов меняется во времени, формула наращения имеет следующий вид

$$S = P(1+i_1)^{n1}(1+i_2)^{n2}\ldots(1+i_k)^{nk}, \qquad (20)$$

где i_1, i_2,..., i_k - последовательные значения ставок процентов, действующих в периоды n1, n2,..., nk соответственно.

Пример 6.

В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 20% годовых плюс маржа 10% в первые два года, 8% в третий год, 5% в четвертый год. Определить величину множителя наращения за 4 года.

Решение.

$$(1+0{,}3)^2(1+0{,}28)(1+0{,}25)=2{,}704$$

Формула удвоения суммы

В целях оценки своих перспектив кредитор или должник может задаться вопросом: через сколько лет сумма ссуды возрастет в N раз при данной процентной ставке. Обычно это требуется при прогнозировании своих инвестиционных возможностей в будущем. Ответ получим, приравняв множитель наращения величине N:

а) для простых процентов

$$(1+ni_{прост.}) = N, \text{ откуда}$$

$$n = \frac{N-1}{i_{прост.}}. \qquad (21)$$

б) для сложных процентов

$$(1+i_{сложн.})^n = N, \text{ откуда}$$

$$n = \frac{\ln N}{\ln(1+i_{сложн.})}. \qquad (22)$$

Особенно часто используется N=2. Тогда формулы (21) и (22) называются формулами удвоения и принимают следующий вид:

а) для простых процентов

$$n = \frac{1}{i_{прост.}}, \qquad (23)$$

б) для сложных процентов

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+i_{сложн.})}. \qquad (24)$$

Если формулу (23) легко применять для прикидочных расчетов, то формула (24) требует применения калькулятора. Однако при небольших ставках процентов (скажем, менее 10%) вместо нее можно использовать более простую приближенную. Ее легко получить, если учесть, что ln 2 □ 0,7, а ln(1+i) □ i. Тогда

$$n \approx 0{,}7/i. \qquad (25)$$

Пример 7.
Рассчитать, за сколько лет долг увеличится вдвое при ставке простых и сложных процентов равной 10%. Для ставки сложных процентов расчеты выполнить по точной и приближенной формуле. Результаты сравнить.

Решение.
а) При простых процентах:

$$n = \frac{1}{i_{прост.}} = \frac{1}{0{,}1} = 10 \text{ лет.}$$

б) При сложных процентах и точной формуле:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i_{сложн.})} = \frac{0{,}693147}{\ln(1 + 0{,}1)} = \frac{0{,}693147}{0{,}09531018} = 7{,}27 \text{ года.}$$

в) При сложных процентах и приближенной формуле:

$$n \approx 0{,}7/i = 0{,}7/0{,}1 = 7 \text{ лет.}$$

Выводы:
1) Одинаковое значение ставок простых и сложных процентов приводит к совершенно различным результатам.
2) При малых значениях ставки сложных процентов точная и приближенная формулы дают практически одинаковые результаты.

Начисление годовых процентов при дробном числе лет

При дробном числе лет проценты начисляются разными способами:
1) По формуле сложных процентов

$$S=P(1+i)^n, \qquad (26)$$

2) На основе смешанного метода, согласно которому за целое число лет начисляются сложные проценты, а за дробное - простые

$$S=P(1+i)^a(1+bi), \qquad (27)$$

где $n=a+b$, a-целое число лет, b-дробная часть года.

3) В ряде коммерческих банков применяется правило, в соответствии с которым за отрезки времени меньше периода начисления проценты не начисляются, т.е.

$$S=P(1+i)^{a}. \qquad (28)$$

Номинальная и эффективная ставки процентов

Номинальная ставка. Пусть годовая ставка сложных процентов равна j, а число периодов начисления в году m. Тогда каждый раз проценты начисляют по ставке j/m. Ставка j называется номинальной. Начисление процентов по номинальной ставке производится по формуле:

$$S=P(1+j/m)^{N}, \qquad (29)$$

где N - число периодов начисления.

Если срок ссуды измеряется дробным числом периодов начисления, то при m разовом начислении процентов в году наращенную сумму можно рассчитывать несколькими способами, приводящими к различным результатам:

1) По формуле сложных процентов

$$S=P(1+j/m)^{N/\tau}, \qquad (30)$$

где N/τ - число (возможно дробное) периодов начисления процентов, τ - период начисления процентов,

2) По смешанной формуле

$$S = P(1+\frac{j}{m})^{a}(1+b\frac{j}{m}), \qquad (31)$$

где a - целое число периодов начисления (т.е. $a=[N/\tau]$ - целая часть от деления всего срока ссуды N на период начисления τ),

b- оставшаяся дробная часть периода начисления $(b=N/\tau-a)$.

Пример 8.

Размер ссуды 20 млн. руб. Предоставлена на 28 месяцев. Номинальная ставка равна 60% годовых. Начисление процентов ежеквартальное. Вычислить наращенную сумму в трех ситуациях: 1) когда на дробную часть начисляются сложные проценты, 2) когда на дробную часть начисляются простые проценты 3) когда дробная часть игнорируется. Результаты сравнить.

Решение.

Начисление процентов ежеквартальное. Всего имеется $\frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$ кварталов.

1) $S = 20(1 + 0{,}6/4)^{9\frac{1}{3}}$ = 73,713 млн. руб.

2) $S = 20(1 + \frac{0{,}6}{4})^9 (1 + \frac{0{,}6}{4} \cdot \frac{1}{3})$ = 73,875 млн. руб.

3) $S=20(1+0{,}6/4)^9$= 70,358 млн. руб.

Из сопоставления наращенных сумм видим, что наибольшего значения она достигает во втором случае, т.е. при начислении на дробную часть простых процентов.

Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m -разовое наращение в год по ставке j/m.

Если проценты капитализируются m раз в год, каждый раз со ставкой j/m, то, по определению, можно записать равенство для соответствующих множителей наращения:

$$(1+i_э)^n=(1+j/m)^{mn}, \qquad (32)$$

где $i_э$ - эффективная ставка, а j - номинальная. Отсюда получаем, что связь между эффективной и номинальной ставками выражается соотношением

$$i_э = (1 + \frac{j}{m})^m - 1 \qquad (33)$$

Обратная зависимость имеет вид

$$j=m[(1+i_э)^{1/m}-1]. \qquad (34)$$

Пример 9.

Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 10% годовых.

Решение

$i_э$=(1+0,1/4)^4-1=0,1038, т.е. 10,38%.

Пример 10.

Определить какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12% годовых.

Решение.

j=4[(1+0,12)$^{1/4}$-1]=0,11495,   т.е. 11,495%.

Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Здесь, также как и в случае простых процентов, будут рассмотрены два вида учета - математический и банковский.

Математический учет. В этом случае решается задача обратная наращению по сложным процентам. Запишем исходную формулу для наращения

$$S=P(1+i)^n$$

и решим ее относительно P

$$P = S\frac{1}{(1+i)^n} = Sv^n, \tag{35}$$

где

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n} \tag{36}$$

учетный или дисконтный множитель.

Если проценты начисляются m раз в году, то получим

$$P = S\frac{1}{(1+j/m)^{mn}} = Sv^{mn}, \tag{37}$$

где

$$v^{mn} = \frac{1}{(1+j/m)^{mn}} = (1+j/m)^{-mn} \tag{38}$$

дисконтный множитель.

Величину P, полученную дисконтированием S, называют **современной** или **текущей стоимостью** или **приведенной величиной** S. Суммы P и S эквивалентны в том смысле, что платеж в сумме S через n лет равноценен сумме P, выплачиваемой в настоящий момент.

Разность $D=S-P$ называют **дисконтом**.

Банковский учет. В этом случае предполагается использование сложной учетной ставки. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле

$$P=S(1-d_{сл})^n, \tag{39}$$

где $d_{сл}$ - сложная годовая учетная ставка.

Дисконт в этом случае равен

$$D=S-P=S-S(1-d_{сл})^n=S[1-(1-d_{сл})^n]. \tag{40}$$

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, так как учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

Номинальная и эффективная учетные ставки процентов

Номинальная учетная ставка. В тех случаях, когда дисконтирование применяют m раз в году, используют **номинальную учетную ставку** f. Тогда в каждом периоде, равном $1/m$ части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке f/m. Процесс дисконтирования по этой сложной учетной m раз в году описывается формулой

$$P=S(1-f/m)^N, \qquad (41)$$

где N - общее число периодов дисконтирования ($N=mn$).

Дисконтирование не один, а m раз в году быстрее снижает величину дисконта.

Эффективная учетная ставка. Под эффективной учетной ставкой понимают сложную годовую учетную ставку, эквивалентную (по финансовым результатам) номинальной, применяемой при заданном числе дисконтирований в году m.

В соответствии с определением эффективной учетной ставки найдем ее связь с номинальной из равенства дисконтных множителей

$$(1-f/m)^{mn}=(1-d_{сл})^n,$$

из которого следует, что

$$d_{сл}=1-(1-f/m)^m. \qquad (42)$$

Отметим, что эффективная учетная ставка всегда меньше номинальной.

Наращение по сложной учетной ставке. Наращение является обратной задачей для учетных ставок. Формулы наращения по сложным учетным ставкам можно получить, разрешая соответствующие формулы для дисконтирования (39 и 41) относительно S. Получаем

из $P=S(1-d_{сл})^n$

$$S=P\frac{1}{(1-d_{сл})^n}, \qquad (43)$$

а из $P=S(1-f/m)^N$

$$S=P\frac{1}{(1-f/m)^N}. \qquad (44)$$

Пример 11.

Какую сумму следует проставить в векселе, если реально выданная сумма равна 20 млн. руб., срок погашения 2 года. Вексель рассчитывается, исходя из сложной годовой учетной ставки 10%.

Решение.

$$S = \frac{20}{(1-0{,}1)^2} = 24{,}691358 \text{ млн. руб.}$$

Пример 12.

Решить предыдущую задачу при условии, что наращение по сложной учетной ставке осуществляется не один, а 4 раза в год.

Решение.

$$S = \frac{20}{(1-0{,}1/4)^8} = 24{,}490242 \text{ млн. руб.}$$

2.2 Непрерывные проценты

Наращение и дисконтирование

Наращенная сумма при дискретных процентах определяется по формуле

$$S=P(1+j/m)^{mn},$$

где j - номинальная ставка процентов, а m - число периодов начисления процентов в году.

Чем больше m, тем меньше промежутки времени между моментами начисления процентов. В пределе при $m \to \infty$ имеем

$$S= \lim_{m\to\infty} P(1+j/m)^{mn}=P \lim_{m\to\infty} [(1+j/m)^{m}]^{n}. \quad (45)$$

Известно, что

$$\lim_{m\to\infty} (1+j/m)^{m}=\lim_{m\to\infty} [(1+j/m)^{m/j}]^{j}=e^{j},$$

где e - основание натуральных логарифмов.

Используя этот предел в выражении (45), окончательно получаем, что наращенная сумма в случае непрерывного начисления процентов по ставке j равна

$$S=Pe^{jn}. \quad (46)$$

Для того, чтобы отличать ставку непрерывных процентов от ставок дискретных процентов, ее называют силой роста и обозначают символом δ. Тогда

$$S=Pe^{\delta n}. \qquad (47)$$

Сила роста δ представляет собой номинальную ставку процентов при $m \to \infty$.

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок осуществляется по формуле

$$P=Se^{-\delta n}. \qquad (48)$$

Связь дискретных и непрерывных процентных ставок

Дискретные и непрерывные процентные ставки находятся в функциональной зависимости, благодаря которой можно осуществлять переход от расчета непрерывных процентов к дискретным и наоборот. Формулу эквивалентного перехода от одних ставок к другим можно получить путем приравнивания соответствующих множителей наращения

$$(1+i)^n=e^{\delta n}. \qquad (49)$$

Из записанного равенства следует, что

$$\delta=ln(1+i), \qquad (50)$$

$$i=e^{\delta}-1. \qquad (51)$$

Пример 13.

Годовая ставка сложных процентов равна 15%, чему равна эквивалентная сила роста,

Решение.

Воспользуемся формулой (50)

$$\delta=ln(1+i)=ln(1+0,15)=0,13976,$$

т.е. эквивалентная сила роста равна 13,976%.

Расчет срока ссуды и процентных ставок

В ряде практических задач начальная (P) и конечная (S) суммы заданы контрактом, и требуется определить либо срок платежа, либо процентную ставку, которая в данном случае может служить мерой сравнения с рыночными показателями и характеристикой доходности операции для кредитора. Указанные величины нетрудно найти из исходных формул наращения или дисконтирования. По сути дела, в обоих случаях решается в известном смысле обратная задача.

Срок ссуды

При разработке параметров соглашения и оценивании сроков достижения желательного результата требуется определить продолжительность операции (срока ссуды) через остальные параметры сделки. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

А) При наращивании по сложной годовой ставке *i*. Из исходной формулы наращения

$$S=P(1+i)^n$$

следует, что

$$n=\frac{\log(S/P)}{\log(1+i)},\qquad (52)$$

где логарифм можно взять по любому основанию, поскольку он имеется как в числителе, так и в знаменателе.

Б) При наращивании по номинальной ставке процентов *m* раз в году из формулы

$$S=P(1+j/m)^{mn}$$

получаем

$$n=\frac{\log(S/P)}{m\log(1+j/m)}.\qquad (53)$$

В) При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке *d*. Из формулы

$$P=S(1-d)^n$$

имеем

$$n=\frac{\log(P/S)}{\log(1-d)}.\qquad (54)$$

Г) При дисконтировании по номинальной учетной ставке *m* раз в году. Из

$$P=S(1-f/m)^{mn}$$

приходим к формуле

$$n=\frac{\log(P/S)}{m\log(1-f/m)}.\qquad (55)$$

При наращивании по постоянной силе роста. Исходя из

$$S=Pe^{\delta n}$$

получаем

$$ln(S/P)=\delta n.\qquad (56)$$

Расчет процентных ставок

Из тех же исходных формул, что и выше, получим выражения для процентных ставок.

А) При наращивании по сложной годовой ставке *i*. Из исходной формулы наращения

$$S=P(1+i)^n$$

следует, что

$$i=\left(\frac{S}{P}\right)^{1/n}-1. \qquad (57)$$

Б) При наращивании по номинальной ставке процентов *m* раз в году из формулы

$$S=P(1+j/m)^{mn}$$

получаем

$$j=m\left[\left(\frac{S}{P}\right)^{1/(mn)}-1\right]. \qquad (58)$$

В) При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке *d*. Из формулы

$$P=S(1-d)^n$$

имеем

$$d=1-\left(\tfrac{P}{S}\right)^{1/n}. \qquad (59)$$

Г) При дисконтировании по номинальной учетной ставке *m* раз в году. Из

$$P=S(1-f/m)^{mn}$$

приходим к формуле

$$f=m\left[1-\left(\frac{P}{S}\right)^{1/(mn)}\right]. \qquad (60)$$

Д) При наращивании по постоянной силе роста. Исходя из

$$S=Pe^{\delta n}$$

получаем

$$\delta=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{S}{P}\right). \qquad (61)$$

Начисление процентов и инфляция

Следствием инфляции является падение покупательной способности денег, которое за период *n* характеризуется индексом J_n**.** **Индекс покупательной способности** равен обратной величине индекса цен J_p, т.е.

$$J_n=1/J_p. \qquad (62)$$

Индекс цен показывает во сколько раз выросли цены за указанный промежуток времени.

Наращение по простым процентам

Если наращенная за n лет сумма денег составляет S, а индекс цен равен J_p, то реально наращенная сумма денег, с учетом их покупательной способности, равна

$$C=S/J_p. \qquad (63)$$

Пусть ожидаемый средний годовой темп инфляции (характеризующий прирост цен за год) равен h. Тогда годовой индекс цен составит $(1+h)$.

Если наращение производится <u>по простой ставке</u> в течение n лет, то реальное наращение при темпе инфляции h составит

$$C=\frac{P(1+ni)}{J_p}, \qquad (64)$$

где в общем случае

$$J_p=\prod_{t=1}^{n}(1+h_t), \qquad (65)$$

и, в частности, при неизменном темпе роста цен h,

$$J_p=(1+h)^n. \qquad (66)$$

Процентная ставка, которая при начислении простых процентов компенсирует инфляцию, равна

$$i=\frac{J_p-1}{n}. \qquad (67)$$

Один из способов компенсации обесценения денег заключается в увеличении ставки процентов на величину так называемой **инфляционной премии.** Скорректированная таким образом ставка называется **брутто-ставкой**. Брутто-ставка, которую мы будем обозначать символом r, находится из равенства скорректированного на инфляцию множителя наращения по брутто-ставке множителю наращения по реальной ставке процента

$$\frac{1+nr}{J_p}=1+ni, \qquad (68)$$

откуда

$$r=\frac{(1+ni)J_p-1}{n}. \qquad (69)$$

Наращение по сложным процентам

Наращенная <u>по сложным процентам</u> сумма к концу срока ссуды с учетом падения покупательной способности денег (т.е. в неизменных рублях) составит

$$C = P\frac{(1+i)^n}{J_p}, \qquad (70)$$

где индекс цен определяется выражением (65) или (66), в зависимости от непостоянства или постоянства темпа инфляции.

В этом случае падение покупательной способности денег компенсируется при ставке $i=h$, обеспечивающей равенство $C=P$.

Применяются **два способа компенсации потерь** от снижения покупательной способности денег при начислении сложных процентов.

А) Корректировка ставки процентов, по которой производится наращение, на величину **инфляционной премии.** Ставка процентов, увеличенная на величину инфляционной премии, называется брутто-ставкой. Будем обозначать ее символом r. Считая, что годовой темп инфляции равен h, можем написать равенство соответствующих множителей наращения

$$\frac{1+r}{1+h} = 1+i, \qquad (71)$$

где i - реальная ставка.

Отсюда получаем формулу Фишера

$$r=i+h+ih. \qquad (72)$$

То есть инфляционная премия равна $h+ih$.

Б) Индексация первоначальной суммы P. В этом случае сумма P корректируется согласно движению заранее оговоренного индекса. Тогда

$$S=PJ_p(1+i)^n. \qquad (73)$$

Нетрудно заметить, что и в случае А) и в случае Б) в итоге мы приходим к одной и той же формуле наращения (73). В ней первые два сомножителя в правой части отражают индексацию первоначальной суммы, а последние два - корректировку ставки процента.

Измерение реальной ставки процента

На практике приходится решать и обратную задачу - находить реальную ставку процента в условиях инфляции. Из тех же соотношений между множителями наращения нетрудно вывести формулы, определяющие реальную ставку i по заданной (или объявленной) брутто-ставке r.

При начислении простых процентов годовая реальная ставка процентов равна

$$i=\frac{1}{n}\left(\frac{1+nr}{J_p}-1\right). \qquad (74)$$

При начислении сложных процентов реальная ставка процентов определяется следующим выражением

$$i=\frac{1+r}{1+h}-1=\frac{r-h}{1+h}. \qquad (75)$$

Практические приложения теории

Рассмотрим некоторые практические приложения рассмотренной нами теории. Покажем как полученные выше формулы применяются при решении реальных задач по расчету эффективности некоторых финансовых операций, сравним различные методы расчетов.

Конвертация валюты и начисление процентов

Рассмотрим совмещение конвертации (обмена) валюты и наращение **простых процентов**, сравним результаты от непосредственного размещения имеющихся денежных средств в депозиты или после предварительного обмена на другую валюту. Всего возможно 4 варианта наращения процентов:

1. Без конвертации. Валютные средства размещаются в качестве валютного депозита, наращение первоначальной суммы производится по валютной ставке путем прямого применения формулы простых процентов.
2. С конвертацией. Исходные валютные средства конвертируются в рубли, наращение идет по рублевой ставке, в конце операции рублевая сумма конвертируется обратно в исходную валюту.
3. Без конвертации. Рублевая сумма размещается в виде рублевого депозита, на который начисляются проценты по рублевой ставке по формуле простых процентов.
4. С конвертацией. Рублевая сумма конвертируется в какую-либо конкретную валюту, которая инвестируется в валютный депозит. Проценты начисляются по валютной ставке. Наращенная сумма в конце операции обратно конвертируется в рубли.

Операции без конвертации не представляют сложности. В операции наращения с двойной конвертацией имеются два источника дохода: начисление процента и изменение курса. Причем начисление процента является безусловным источником (ставка фиксирована, инфляцию пока не рассматриваем). Изменение же обменного курса может быть как в ту, так и в другую сторону, и оно может быть как источником дополнительного дохода, так и приводить к потерям. Далее мы конкретно остановимся на двух вариантах (2 и 4), предусматривающих двойную конвертацию.

Предварительно введем следующие ОБОЗНАЧЕНИЯ:

P_v - сумма депозита в валюте,
P_r - сумма депозита в рублях,
S_v - наращенная сумма в валюте,
S_r - наращенная сумма в рублях,
K_0 - курс обмена в начале операции (курс валюты в руб.)

K_1 - курс обмена в конце операции,
n - срок депозита,
i - ставка наращения для рублевых сумм (в виде десятичной дроби),
j - ставка наращения для конкретной валюты.

ВАРИАНТ: ВАЛЮТА$\rightarrow$ РУБЛИ $\rightarrow$ РУБЛИ $\rightarrow$ВАЛЮТА

Операция состоит из трех этапов: обмена валюты на рубли, наращения рублевой суммы, обратное конвертирование рублевой суммы в исходную валюту. Наращенная сумма, получаемая в конце операции в валюте, составит

$$S_v = P_v K_0 (1 + ni) \frac{1}{K_1}.$$

Как видим, три этапа операции нашли свое отражение в этой формуле в виде трех сомножителей.

Множитель наращения с учетом двойной конвертации равен

$$m = \frac{K_0}{K_1}(1 + ni) = \frac{1 + ni}{\left(\frac{K_1}{K_0}\right)} = \frac{1 + ni}{k},$$

где $k=K_1/K_0$ - темп роста обменного курса за срок операции.

Мы видим, что множитель наращения m связан линейной зависимостью со ставкой i и обратной с обменным курсом в конце операции K_1 (или с темпом роста обменного курса k).

Исследуем теоретически зависимость общей доходности операции с двойной конвертацией по схеме ВАЛЮТА $\rightarrow$ РУБЛИ $\rightarrow$ РУБЛИ $\rightarrow$ ВАЛЮТА от соотношения конечного и начального курсов обмена k.

Простая годовая ставка процентов, характеризующая доходность операции в целом, равна

$$i_{эфф} = \frac{S_v - P_v}{P_v n}.$$

Подставим в эту формулу записанное ранее выражение для S_v

$$i_{эфф} = \frac{\frac{K_0}{K_1}(1 + ni) - 1}{n} = \frac{1}{k}\frac{(1 + ni)}{n} - \frac{1}{n}.$$

Таким образом с увеличением k доходность $i_{эфф}$ падает по гиперболе с асимптотой $-1/n$. См. рис. 2.

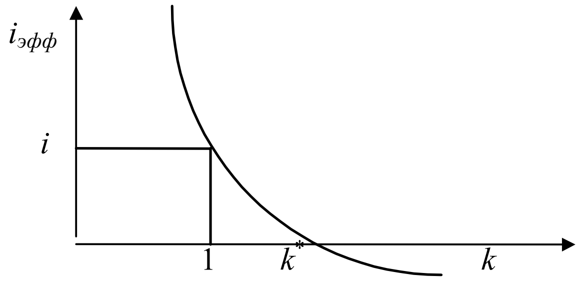


Рис. 2.

Исследуем особые точки этой кривой. Отметим, что при $k=1$ доходность операции равна рублевой ставке, т.е. $i_{эфф}=i$. При $k>1$ $i_{эфф}<i$, а при $k<1$ $i_{эфф}>i$. На рис. 1 видно, при некотором критическом значении k, которое мы обозначим как k^*, доходность (эффективность) операции оказывается равной нулю. Из равенства $i_{эфф}=0$ находим, что $k^*=1+ni$, что в свою очередь означает $K^*_1=K_0(1+ni)$.

ВЫВОД 1: Если ожидаемые величины k или K_1 превышают свои критические значения, то операция явно убыточна ($i_{эфф}<0$).

Теперь определим **максимально допустимое значение курса обмена в конце операции** K_1, при котором эффективность будет равна существующей ставке по депозитам в валюте, и применение двойной конвертации не дает никакой дополнительной выгоды. Для этого приравняем множители наращения для двух альтернативных операций

$$1+nj=\frac{K_0}{K_1}(1+ni).$$

Из записанного равенства следует, что

$$\max K_1=K_0\frac{1+ni}{1+nj}$$

или

$$\max k=\frac{K_1}{K_0}=\frac{1+ni}{1+nj}.$$

ВЫВОД 2: Депозит валюты через конвертацию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше $\max K_1$.

ВАРИАНТ: РУБЛИ $\to$ ВАЛЮТА $\to$ ВАЛЮТА $\to$ РУБЛИ

Рассмотрим теперь вариант с двойной конвертацией, когда имеется исходная сумма в рублях. В этом случае трем этапам операции соответствуют три сомножителя следующего выражения для наращенной суммы

$$S_r = \frac{P_r}{K_0}(1+nj)K_1 = P_r(1+nj)\frac{K_1}{K_0}.$$

Здесь также множитель наращения линейно зависит от ставки, но теперь от валютной ставки процентов. От конечного курса обмена он также зависит линейно.

Проведем теоретический анализ эффективности этой операции с двойной конвертацией и определим критические точки.

Доходность операции в целом определяется по формуле

$$i_{эфф} = \frac{S_r - P_r}{P_r n}.$$

Отсюда, подставив выражение для S_r, получаем

$$i_{эфф} = \frac{\frac{K_1}{K_0}(1+nj)-1}{n} = \frac{k(1+nj)-1}{n}.$$

Зависимость показателя эффективности $i_{эфф}$ от k линейная, она представлена на рис. 3

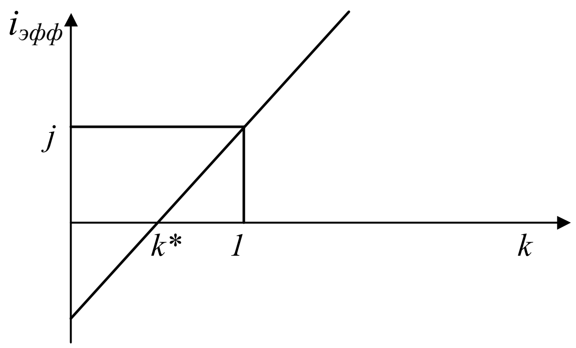


Рис. 3.

При $k=1$ $i_{эфф}=j$, при $k>1$ $i_{эфф}>j$, при $k<1$ $i_{эфф}<j$.

Найдем теперь критическое значение k^*, при котором $i_{эфф}=0$. Оно оказывается равным

$$k^* = \frac{1}{1+nj} \quad \text{или} \quad K^*_1 = \frac{K_0}{1+nj}.$$

ВЫВОД 3: Если ожидаемые величины k или K_1 меньше своих критических значений, то операция явно убыточна ($i_{эфф}<0$).

Минимально допустимая величина k (темпа роста валютного курса за весь срок операции), обеспечивающая такую же доходность, что и прямой вклад в рублях, определяется путем приравнивания множителей наращения для альтернативных операций (или из равенства $i_{эфф}=i$)

$$\frac{K_1}{K_0}(1+nj)=1+ni,$$

откуда $min\ k=\dfrac{1+ni}{1+nj}$ или $min\ K_1=K_0\dfrac{1+ni}{1+nj}$.

ВЫВОД 4: Депозит рублевых сумм через конвертацию в валюту выгоднее рублевого депозита, если обменный курс в конце операции ожидается больше min K_1.

Теперь рассмотрим совмещение конвертации валюты и наращение **сложных процентов.** Ограничимся одним вариантом.

ВАРИАНТ: ВАЛЮТА → РУБЛИ → РУБЛИ → ВАЛЮТА

Три этапа операции записываются в одной формуле для наращенной суммы

$$S_v=P_vK_0(1+i)^n\frac{1}{K_1},$$

где i - ставка сложных процентов.

Множитель наращения

$$m=(1+i)^n\frac{K_0}{K_1}=\frac{(1+i)^n}{k},$$

где $k=\dfrac{K_1}{K_0}$ - темп роста валютного курса за период операции.

Определим доходность операции в целом в виде годовой ставки сложных процентов $i_э$.

Из формулы наращения по сложным процентам

$$S=P(1+i)^n$$

следует, что

$$i_э=\sqrt[n]{\frac{S_v}{P_v}}-1.$$

Подставив в эту формулу значение S_v, получим

$$i_э=\sqrt[n]{\frac{P_v(1+i)^n\dfrac{K_0}{K_1}}{P_v}}-1=\frac{1+i}{\sqrt[n]{k}}-1.$$

Из этого выражения видно, что с увеличением темпа роста k эффективность $i_э$ падает. Это показано на графике рис. 4.

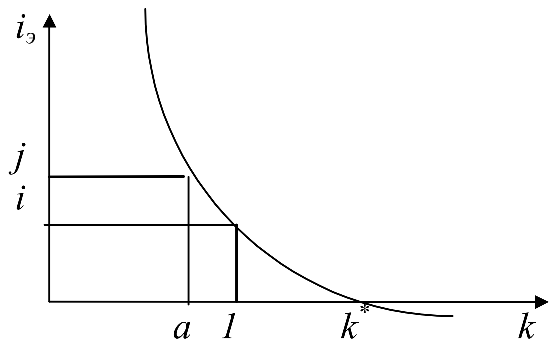


Рис. 4.

Анализ показывает, что при $k=1$ $i_э=i$, при $k>1$ $i_э<i$, а при $k<1$ $i_э>i$.

Критическое значение k, при котором эффективность операции равна нулю, т.е. $i_э=0$,

определяется как $k^*=(1+i)^n$, что означает равенство среднегодового темпа роста курса валюты годовому темпу наращения по рублевой ставке: $\sqrt[n]{k}=1+i$.

ВЫВОД 5: Если ожидаемые величины k или K_1 больше своих критических значений, то рассматриваемая операция с двойной конвертацией явно убыточна ($i_э<0$).

Максимально допустимое значение k, при котором доходность операции будет равна доходности при прямом инвестировании валютных средств по ставке j (т. a на рис. 4), находится из равенства соответствующих множителей наращения

$$(1+j)^n=\frac{(1+i)^n}{k_{\max}},$$

откуда

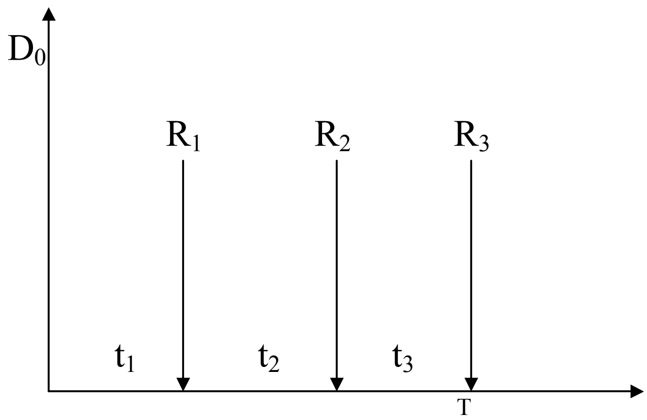
$$k_{\max}=\left(\frac{1+i}{1+j}\right)^n \qquad \text{или} \qquad max\ K_1=K_0\left(\frac{1+i}{1+j}\right)^n.$$

ВЫВОД 6: Депозит валюты через конвертацию в рубли выгоднее валютного депозита, если обменный курс в конце операции ожидается меньше max K_1.

Погашение задолженности частями
Контур финансовой операции

Финансовая или кредитная операции предполагают сбалансированность вложений и отдачи. Понятие сбалансированности можно пояснить на графике.

а)



б)

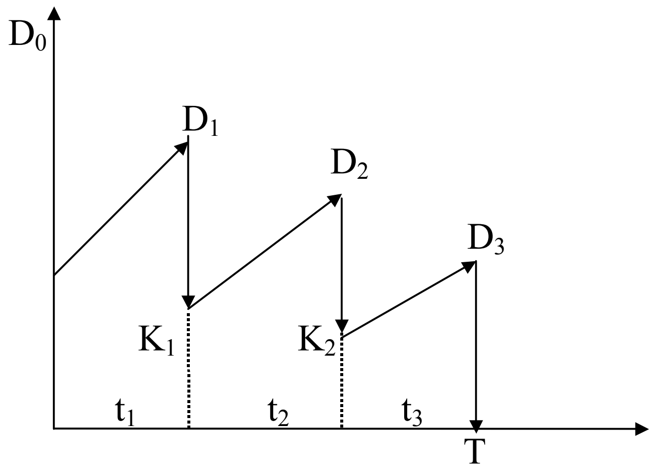


Рис. 5.

Пусть ссуда в размере D_0 выдана на срок T. На протяжении этого срока в счет погашения задолженности производятся, допустим, два промежуточных платежа R_1 и R_2, а в конце срока выплачивается остаток задолженности R_3, подводящий баланс операции.

На интервале времени t_1 задолженность возрастает до величины D_1. В момент t_1 долг уменьшается до величины $K_1=D_1-R_1$ и т.д. Заканчивается операция получением кредитором остатка задолженности R_3. В этот момент задолженность полностью погашается.

Назовем график типа б) *контуром финансовой операции*. Сбалансированная операция обязательно имеет замкнутый контур, т.е. последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности. Контур операции обычно применяется при погашении задолженности частичными промежуточными платежами.

С помощью последовательных частичных платежей иногда погашаются краткосрочные обязательства. В этом случае существуют два метода расчета процентов и определения остатка задолженности. Первый называется **актуарным** и применяется в основном в операциях со сроком *более года*. Второй метод назван **правилом торговца**. Он обычно применяется коммерческими фирмами в сделках со сроком *не более года*.

Замечание: При начислении процентов, как правило, используются обыкновенные проценты с приближенным числом дней временных периодов.

Актуарный метод

Актуарный метод предполагает последовательное начисление процентов на фактические суммы долга. Частичный платеж идет в первую очередь на погашение процентов, начисленных на дату платежа. Если величина платежа превышает сумму начисленных процентов, то разница идет на погашение основной суммы долга. Непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период и т.д. Если же частичный платеж меньше начисленных процентов, то никакие зачеты в сумме долга не делаются. Такое поступление приплюсовывается к следующему платежу.

Для случая, показанного на рис. 5 б), получим следующие расчетные формулы для определения остатка задолженности:

$$K_1=D_0(1+t_1i)-R_1; \quad K_2=K_1(1+t_2i)-R_2; \quad K_2(1+t_3i)-R_3=0,$$

где периоды времени t_1, t_2, t_3 - заданы в годах, а процентная ставка i - годовая.

Правило торговца

Правило торговца является другим подходом к расчету частичных платежей. Здесь возможны две ситуации.

1) Если срок ссуды не превышает, сумма долга с начисленными за весь срок процентами остается неизменной до полного погашения. Одновременно идет накопление частичных платежей с начисленными на них до конца срока процентами.

2) В случае, когда срок превышает год, указанные выше расчеты, делаются для *годового* периода задолженности. В конце года из суммы задолженности вычитается наращенная сумма накопленных частичных платежей. Остаток погашается в следующем году.

При общем сроке ссуды $T \le 1$ алгоритм можно записать следующим образом

$$S = D - K = P(1 + Ti) - \sum_{j=1}^{m} R_j (1 + t_j i),$$

где S - остаток долга на конец срока,
D - наращенная сумма долга,
K - наращенная сумма платежей,
R_j - сумма частичного платежа,
t_j - интервал времени от момента платежа до конца срока,
m - число частичных (промежуточных) платежей.

Переменная сумма счета и расчет процентов

Рассмотрим ситуацию, когда в банке открыт сберегательный счет, и сумма счета в течение срока хранения изменяется: денежные средства снимаются, делаются дополнительные взносы. Тогда в банковской практике при расчете процентов часто используют методику расчета с вычислением так называемых *процентных чисел*. Каждый раз, когда сумма на счете изменяется, вычисляется процентное число C_j за прошедший период j, в течение которого сумма на счете оставалась неизменной, по формуле

$$C_j = \frac{P_j t_j}{100},$$

где t_j - длительность j-го периода в днях.

Для определения суммы процентов, начисленной за весь срок, все процентные числа складываются и их сумма делится на постоянный делитель D:

$$D = \frac{K}{i},$$

где K - временная база (число дней в году, т.е. 360 либо 365 или 366), i - годовая ставка простых процентов (в %).

При закрытии счета владелец получит сумму равную последнему значению суммы на счете плюс сумму процентов.

Пример 14.

Пусть 20 февраля был открыт счет до востребования в размере P_1=3000 руб., процентная ставка по вкладу равнялась i=20% годовых. Дополнительный взнос на счет составил R_1=2000 руб. и был сделан 15 августа. Снятие со счета в размере R_2=-4000 руб. зафиксировано 1 октября, а 21 ноября счет был закрыт. Требуется определить сумму процентов и общую сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета.

Решение.

Расчет будем вести по схеме (360/360). Здесь имеются три периода, в течение которых сумма на счете оставалась неизменной: с 20 февраля по 15 августа (P_1=3000, t_1=10+5*30+15=175), с 15 августа по 1 октября

(P_2=P_1+R_1=3000+2000=5000 руб., t_2=15+30+1=46), с 1 октября по 21 ноября (P_3=P_2+R_2=5000-4000=1000 руб., t_3=29+21=50).

Найдем процентные числа

$$C_1 = \frac{P_1 * t_1}{100} = \frac{3000*175}{100} = 5250,$$

$$C_2 = \frac{P_2 * t_2}{100} = \frac{5000*46}{100} = 2300,$$

$$C_3 = \frac{P_3 * t_3}{100} = \frac{1000*50}{100} = 500.$$

Постоянный делитель

$$D=K/i=360/20=18.$$

Сумма процентов равна

$$I = (C_1 + C_2 + C_3)/D = \frac{5250+2300+500}{18} = 447\text{р}\textit{уб.22коп.}$$

Сумма, выплачиваемая при закрытии счета, равна

P_3+*I=1000+447.22=1447* руб. *22* коп.

Теперь покажем связь этой методики с формулой простых процентов. Рассмотрим в алгебраическом виде представленный выше пример.

Сумму, выплачиваемую при закрытии счета, найдем следующим образом

$$P_3 + I = P_1 + R_1 + R_2 + \frac{P_1t_1 + (P_1 + R_1)t_2 + (P_1 + R_1 + R_2)t_3}{100}\frac{i}{K} =$$
$$= P_1\left(1 + \frac{t_1 + t_2 + t_3}{K}\frac{i}{100}\right) + R_1\left(1 + \frac{t_2 + t_3}{K}\frac{i}{100}\right) + R_2\left(1 + \frac{t_3}{K}\frac{i}{100}\right)$$

Таким образом, мы получили выражение, из которого следует, что на каждую сумму, добавляемую или снимаемую со счета, начисляются проценты с момента совершения соответствующей операции до закрытия счета. Эта схема соответствует правилу торговца, рассмотренному в разделе 6.2.

Изменение условий контракта

В практике часто возникает необходимость в изменении условий контракта: например, должник может попросить об отсрочке срока погашения долга или, напротив, изъявить желание погасить его досрочно, в ряде случаев может возникнуть потребность объединить (консолидировать) несколько долговых обязательств в одно и т.д. Во всех этих случаях применяется принцип финансовой эквивалентности старых (заменяемых) и новых (заменяющих) обязательств. Для решения задач по изменению условий контракта разрабатывается так называемое *уравнение эквивалентности*, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо одному моменту времени, приравнивается сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате. Для краткосрочных контрактов применяются простые процентные ставки, а для средне- и долгосрочных - сложные ставки.

ЧАСТЬ II. АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

Введение

Многие финансовые, кредитные и коммерческие операции предполагают выплату одной из сторон регулярных периодических платежей, которые образуют поток платежей. Такие потоки характеризуются рядом параметров, совокупность которых существенно влияет на доходность операции. К таким параметрам относятся: сумма платежа (размер регулярных инвестиций, взносов, выплат и т.п.), периодичность поступлений или выплат, способы начисления процентов, срок операции и т.д. Важнейшей задачей при этом является расчет конечных финансовых результатов, определение их чувствительности к значениям параметров, разработка условий соглашений, эквивалентное изменение условий контрактов и т.д.

В данном курсе рассматриваются методы количественного анализа последовательности (потоков) платежей, в частности, финансовых рент (аннуитетов). Такие методы имеют важное значение в практике финансовых расчетов при разработке планов выполнения ряда операций. Например, в анализе долгосрочных кредитных операций, сопоставлении инвестиционного потока платежей и потока возврата, в разработке планов формирования фонда или погашения долга, в оценке и сравнении эффективности инвестиционных проектов, расчете лизинга, ипотеки, страховых операций и т.д.

Настоящее пособие представляет собой вторую часть курса, состоящего из двух дисциплин: «Основы финансовых расчетов» и «Анализ финансовых потоков». В первой части были рассмотрены основные понятия, которыми оперируют в финансовых вычислениях, такие как процент, ставка процента, учетная ставка, современная (текущая) стоимость платежа и т.д., методы наращения и дисконтирования платежей, принципы, лежащие в основе финансовых вычислений, современная практика расчетов.

Данное пособие предполагает, что систематизированное изложение основных понятий и методов финансовых вычислений, данное нами в первой части, в курсе «Основы финансовых расчетов», читателю уже известно.

В «Анализе финансовых потоков» будут даны основы количественного анализа последовательности (потоков) платежей, в частности, - финансовых рент (аннуитетов). Потоки денежных платежей часто встречаются в практике. Например, регулярные взносы для формирования какого-либо фонда (инвестиционного, страхового, пенсионного, для погашения долга), периодическая уплата процентов, доходы по облигациям или ценным бумагам, выплата пенсий, поступление доходов от коммерческой или предпринимательской деятельности, налоговые платежи и т.д. Полнее с методами расчетов, разработанными для анализа различных видов финансовых рент (в том числе с переменными размерами платежей), можно познакомиться в специальной литературе и, в частности, в книге Е.М.Четыркина, указанной в разделе «Литература». Такие методы имеют важное значение в практике финансовых расчетов и позволяют определить как обобщающие характеристики рент (наращенную сумму, текущую стоимость), так и отдельные их параметры.

Материал пособия имеет общий характер и может быть применен в расчетах часто встречающихся на практике финансовых операций: расчете кредитных и коммерческих операций, эффективности инвестиционной и предпринимательской деятельности.

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих принципы и методы финансового анализа потоков платежей, и специалистов-практиков, желающих расширить свои знания и повысить квалификацию.

«АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ»

Тематический план

Наименование разделов и тем	Всего часов	Аудиторные занятия (лекции и практические)
Раздел I. Потоки платежей		
Тема 1. Финансовые ренты (аннуитеты)	12	9+3
Раздел II. Кредитные операции	5	4+1
Тема 2. Анализ кредитных операций		
Тема 3. Форфейтная кредитная операция	2 1	2 1
Тема 4. Ипотечные ссуды	1	1
Тема 5. Льготные займы и кредиты		
Раздел III. Потоки платежей в производственной деятельности		
Тема 6. Определение оптимального уровня денежных средств	2	1+1
Тема 7. Показатели эффективности производственных инвестиций.	4 1	2+2 1
Тема 8. Аренда оборудования (лизинг)		
Раздел IV. Потоки платежей в условиях риска и неопределенности		
Тема 9. Неопределенность размеров платежа	2 1	2 1
Тема 10. Риск невозврата		
ВСЕГО:	32	32

АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

Содержание тем:

Раздел I. Потоки платежей

Тема 1. *Финансовые ренты (аннуитеты)*

Потоки платежей. Определение финансовой ренты и ее параметров. Виды ренты, различные принципы классификации. Вывод формул для расчета наращенной (будущей) и современной (текущей) стоимости обычной ренты постнумерандо. Вывод формул для различного числа платежей в году и для различной частоты начисления процентов. Определение других параметров ренты (размера платежа, срока, процентной ставки). Два метода расчета процентной ставки ренты: метод линейной интерполяции, метод Ньютона-Рафсона. Другие виды ренты: пренумерандо, отсроченная рента, вечная рента. Расчет ренты при переменной ставке процентов.

Приложения:

Расчетные задачи по определению параметров ренты. Конверсия аннуитетов. Изменение условий контрактов. Расчет кривой доходности, форвардных (наведенных) ставок.

Раздел II. Кредитные операции

Тема 2. *Анализ кредитных операций*

Долгосрочные кредиты. Расходы по обслуживанию долгосрочных кредитов. Планирование погасительного фонда. Погашение кредита в рассрочку. Льготные займы и кредиты. Грант-элемент. Реструктурирование займа. Полная доходность кредитной операции. Баланс финансово-кредитной операции. Доходность ссудных и учетных операций с удержанием комиссионных. Доходность купли-продажи финансовых инструментов. Доходность потребительского кредита. Коммерческий кредит, сравнение коммерческих контрактов и условий кредита. Рейтинг контрактов. Определение предельных значений параметров контракта, обеспечивающих конкурентоспособность.

Приложения:

Методы погашения долга. Создание на определенную дату погасительного фонда с помощью потока регулярных платежей. Погашение текущего долга равномерными платежами в течение оговоренного срока. Расчет действительной доходности кредитора по потребительскому кредиту.

Тема 3. *Форфейтная кредитная операция*

Сущность операции а форфэ. Анализ позиции продавца, покупателя и банка.

Тема 4. *Ипотечные ссуды*

Виды ипотечных ссуд. Стандартная ипотека. Нестандартные ипотеки. План (график) погашения долга. Расчетные примеры.

Тема 5. *Льготные займы и кредиты*

Абсолютный грант-элемент. Относительный грант-элемент.

Раздел III. Потоки платежей в производственной деятельности

Тема 6. *Определение оптимального уровня денежных средств*

Модель Баумоля. Модель Миллера-Орра. Анализ динамики распределения кассовых остатков с помощью адаптивной гистограммы. Проблема оптимальности. Примеры.

Тема 7. *Показатели эффективности производственных инвестиций*

Чистый приведенный доход. Срок окупаемости. Внутренняя норма доходности. Рентабельность. Достоинства и недостатки этих критериев. Расчетные примеры.

Тема 8. *Аренда оборудования (лизинг)*

Виды лизинга. Расчет платежей по лизингу.

Раздел IV. Потоки платежей в условиях риска и неопределенности

Тема 9. *Неопределенность размеров платежа*

Учет неопределенности в расчетах параметров рент. Примеры.

Тема 10. *Риск невозврата*

Учет риска в потоках платежей при заключении сделок. Примеры.

Раздел I. Потоки платежей

Очень часто в контрактах финансового характера предусматриваются не отдельные разовые платежи, а серию платежей, распределенных во времени. Примерами могут быть регулярные выплаты с целью погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами, периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.), дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам, выплаты пенсий из пенсионного фонда и пр. Ряд последовательных выплат и поступлений называют **потоком платежей**. Выплаты представляются отрицательными величинами, а поступления - положительными.

Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма и современная величина. Каждая из этих характеристик является числом.

Наращенная сумма потока платежей это сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Под **современной величиной потока платежей** понимают сумму всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Конкретный смысл этих обобщающих характеристик определяется природой потока платежей, причиной, его порождающей. Например, наращенная сумма может представлять собой итоговый размер формируемого инвестиционного или какого-либо другого фонда, общую сумму задолженности. Современная величина может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки.

1.1 Финансовые ренты (аннуитеты)

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны, называют **финансовой рентой** или **аннуитетом**.

Финансовая рента имеет следующие параметры: **член ренты** - величина каждого отдельного платежа, **период ренты** - временной интервал между двумя соседними платежами, **срок ренты** - время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода, **процентная ставка** - ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту, число платежей в году, число начислений процентов в году, моменты платежа внутри периода ренты.

1.2 Виды финансовых рент

Классификация рент может быть произведена по различным признаками. Рассмотрим их.

В зависимости от продолжительности периода, ренты делят на годовые и р-срочные, где р - число выплат в году.

По числу начислений процентов различают ренты с начислением один в году, m раз или непрерывно. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей.

По величине членов различают **постоянные** (с равными членами) и **переменные ренты**. Если размеры платежей изменяются по какому-либо математическому закону, то часто появляется возможность вывести стандартные формулы, значительно упрощающие расчеты.

По вероятности выплаты членов различают **ренты верные** и **условные**. Верные ренты подлежат безусловной выплате, например, при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее неизвестно. Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.

По числу членов различают ренты с конечным числом членов или ограниченные и бесконечные или вечные. В качестве вечной ренты можно рассматривать выплаты по облигационным займам с неограниченными или не фиксированными сроками.

В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту ренты подразделяются на **немедленные** и **отложенные** или **отсроченные**. Срок немедленных рент начинается сразу, а у отложенных запаздывает.

Ренты различают по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляются в конце каждого периода, то такие ренты называются **обычными** или **постнумерандо**. Если же выплаты производятся в начале каждого периода, то ренты называются **пренумерандо**. Иногда предусматриваются платежи в середине каждого периода.

Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет наращенной суммы или современной величины ренты.

1.3 Формулы наращенной суммы

Обычная годовая рента

Пусть в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R рублей, проценты начисляются один раз в года по ставке i. В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$, так как на сумму R проценты начислялись в течение $n-1$ года. Второй взнос увеличится до $R(1+i)^{n-2}$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии

$$S=R+R(1+i)+R(1+i)^2+. . . + R(1+i)^{n-1},$$

в которой первый член равен R, знаменатель $(1+i)$, число членов n. Эта сумма равна

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;i}, \qquad (1.1)$$

где

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (1.2)$$

и называется **коэффициентом наращения ренты**. Он зависит только от срока ренты n и уровня процентной ставки i. Поэтому его значения могут быть представлены в таблице с двумя входами.

Пример

В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн. руб., на которые начисляются проценты по сложной годовой ставке 10%. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение

$$S = 10\frac{(1+0{,}1)^3 - 1}{0{,}1} = 33{,}1.$$

Годовая рента, начисление процентов *m* раз в году

Посмотрим как усложнится формула, если предположить теперь, что платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году. Это означает, что применяется каждый раз ставка j/m, где j - номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид

$$R(1+j/m)^{m(n-1)}, R(1+j/m)^{m(n-2)}, . . . , R.$$

Если прочитать предыдущую строку справа налево, то нетрудно увидеть, что перед нами опять геометрическая прогрессия, первым членом которой является R, знаменателем $(1+j/m)^m$, а число членов n.

Сумма членов этой прогрессии и будет наращенной суммой ренты. Она равна

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m}-1}. \qquad (1.3)$$

Рента *p*-срочная, *m*=1

Найдем наращенную сумму при условии, что рента выплачивается p раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года. Если R - годовая сумма платежей, то размер отдельного платежа равен R/p. Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами также представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке,

$$\frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}, \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}}, \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{3}{p}}, \ldots, \frac{R}{p},$$

у которой первый член R/p, знаменатель $(1+i)^{1/p}$, общее число членов np. Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов этой геометрической прогрессии

$$S = \frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i)^{(1/p)np}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = R\frac{(1+i)^{n}-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]} = Rs_{n;i}^{(p)}, \qquad (1.4)$$

где

$$s_{n;i}^{(p)} = \frac{(1+i)^{n}-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]} \qquad (1.5)$$

коэффициент наращения *p*-срочной ренты при $m=1$.

Рента *p*-срочная, *p*=*m*

В контрактах часто начисление процентов и поступление платежа совпадают во времени. Таким образом число платежей p в году и число начислений процентов m совпадают, т.е. $p=m$. Тогда для получения формулы расчета наращенной суммы можно воспользоваться аналогией с годовой рентой и одноразовым начислением процентов в конце года, для которой

$$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}.$$

Различие будет лишь в том, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год.

Таким образом получаем

$$S = \frac{R}{m}\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m} = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j}. \qquad (1.6)$$

Рента *p*-срочная, *p≥1, m≥1*

Это самый общий случай p-срочной ренты с начислением процентов m раз в году, причем, возможно $p \geq m$.

Первый член ренты *R/p*, уплаченный спустя *1/p* года после начала, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами

$$\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m(n-\frac{1}{p})}=\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn-m/p}.$$

Второй член ренты к концу срока возрастет до

$$\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m(n-\frac{2}{p})}=\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn-2(m/p)}$$

и т.д. Последний член этой записанной в обратном порядке геометрической прогрессии равен *R/p*, ее знаменатель $(1+j/m)^{m/p}$, число членов *nm*.

В результате получаем наращенную сумму

$$S=\frac{R}{p}\frac{(1+j/m)^{(m/p)np}}{(1+j/m)^{m/p}-1}=R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}. \qquad (1.7)$$

Отметим, что из нее легко получить все рассмотренные выше частные случаи, задавая соответствующие значения *p* и *m*.

1.4 Формулы современной величины

Обычная годовая рента

Пусть член годовой ренты равен *R*, процентная ставка *i*, проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты *n*. Тогда дисконтированная величина первого платежа равна

$$R\frac{1}{1+i}=Rv,$$

где

$$v=\frac{1}{1+i}$$ - дисконтный множитель.

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна Rv^2 и т.д. В итоге приведенные величины образуют геометрическую прогрессию: $Rv, Rv^2, Rv^3, ..., Rv^n$, сумма которой равна

$$A=Rv\frac{v^n-1}{v-1}=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=Ra_{n;i}, \qquad (1.8)$$

где

$$a_{n;i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (1.9)$$

- **коэффициент приведения ренты**.

Как видим, коэффициент приведения ренты зависит только от двух параметров: срока ренты *n* и процентной ставки *i*. Поэтому его значения могут быть представлены в табличном виде. Такие таблицы можно найти в книгах или построить самим на компьютере.

Рента *p*-срочная, *p≥1, m≥1*

Аналогичные рассуждения позволяют получить формулу для расчета современной величины ренты в самом общем случае для произвольных значений p и m

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}, \qquad (1.10)$$

от которой нетрудно перейти к частным случаям при различных p и m.

1.5 Зависимость между современной величиной и наращенной суммой ренты

Пусть A - современная величина годовой ренты постнумерандо, а S - ее наращенная стоимость к концу срока n, $p=1$, $m=1$.

Покажем, что наращение процентов на сумму A за n лет дает сумму, равную S:

$$A(1+i)^n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n-1}{i} = S \qquad (1.11)$$

Отсюда же следует, что дисконтирование S дает A:

$$Sv^n=A, \qquad (1.12)$$

а коэффициент дисконтирования и наращения ренты связаны соотношениями:

$$a_{n;i}(1+i)^n = s_{n;i} \qquad (1.13)$$

$$s_{n;i}v^n = a_{n;i}. \qquad (1.14)$$

1.6 Определение параметров финансовой ренты

Иногда при разработке контрактов возникает задача определения по заданной наращенной сумме ренты S или ее современной стоимости A остальных параметров ренты: R, n, i, p, m. Такие параметры как m и p обычно задаются по согласию двух подписывающих сторон. Остаются параметры R, n, i. Два из них задаются, а третий рассчитывается. Такие расчеты могут быть неоднократно повторены при различных значениях задаваемых параметров, пока не будет достигнуто согласие сторон.

Определение размера ежегодной суммы платежа *R*

В зависимости от того какая обобщающая характеристика постоянной ренты задана S или A, возможны два варианта расчета

$$R=S/s_{n;i} \qquad (1.15)$$

или

$$R=A/a_{n;i}. \qquad (1.16)$$

Определение срока постоянной ренты

Рассмотрим решение этой задачи на примере обычной годовой ренты с постоянными заданными платежами. Решая исходные формулы для S и A

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{и} \quad A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

относительно срока n, получаем соответственно следующие два выражения

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)} \quad \text{и} \quad n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)}{\ln(1+i)} \qquad (1.17)$$

Последнее выражение, очевидно, имеет смысл только при $R>Ai$.

Определение ставки процентов

Для того, чтобы найти ставку i, необходимо решить одно из нелинейных уравнений (опять предполагаем, что речь идет о постоянной годовой ренте постнумерандо) следующего вида

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{или} \quad A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

которые эквивалентны двум другим

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{S}{R} = s_{n;i} \quad \text{или} \quad \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A}{R} = a_{n;i} \qquad (1.18)$$

В этих уравнениях единственным неизвестным является процентная ставка i. Решение нелинейных уравнений может быть найдено лишь приближенно. Известно несколько методов решения таких уравнений: метод линейной интерполяции, метод Ньютона-Рафсона и др. Мы рассмотрим сначала первый из них.

Метод линейной интерполяции

Прежде всего нужно найти с помощью прикидочных расчетов нижнюю ($i_н$) и верхнюю ($i_в$) оценки ставки. Это осуществляется путем подстановки в одну из формул (1.18) различных числовых значений i и сравнения результата с правой частью выражения. Далее корректировка нижнего значения ставки производится по следующей интерполяционной формуле

$$i = i_н + \frac{s - s_н}{s_в - s_н}(i_в - i_н), \qquad (1.19)$$

в которой $s_в$ и $s_в$ - значения коэффициента наращения (или коэффициента приведения) ренты для процентных ставок $i_н$ и $i_в$ соответственно.

Полученное значение ставки проверяют, подставляя его в левую часть исходного уравнения и сравнивая результат с правой частью. Если достигнутая точность недостаточна, повторно применяют формулу (1.19), заменив в ней значение одной из приближенных оценок ставки на более точное, найденное на предыдущей итерации, и соответствующее ей значение множителя наращения (или приведения).

Метод Ньютона-Рафсона

В этом методе решение также находят итеративно, постепенно шаг за шагом уточняя оценку. Метод разработан для решения нелинейных уравнений вида

$f(x)=0$.

В нашем конкретном случае алгоритм поиска сводится к трем операциям на каждом шаге, которые зависят от постановки задачи (задана S или A) и типа ренты.

Сначала будем считать, что известна наращенная сумма S и найдена какая-то начальная оценка процентной ставки (например, методом проб).

<u>А) Постоянная годовая рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, p=1, m=1.</u>

Требуется решить уравнение вида

$$\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{S}{R}=s_{n;i} \quad \text{или} \quad \frac{(1+i)^n-1}{i}-s_{n;i}=0.$$

Если ввести обозначение $q=1+i$ и умножить обе части уравнения на $-(q-1)$, то получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k)=q_k^n-1-\frac{S}{R}(q_k-1)$$

$$f'(q_k)=nq_k^{n-1}-\frac{S}{R}$$

$$q_{k+1}=q_k-\frac{f(q_k)}{f'(q_k)}$$

<u>Б) Постоянная p-срочная рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, p≥1, m=1.</u>

Требуется решить уравнение вида

$$\frac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]}=\frac{S}{R}=s_{n,i}^{(p)} \quad \text{или} \quad \frac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]}-s_{n,i}^{(p)}=0.$$

Вновь используем обозначение $q=1+i$ и получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k) = q_k^n - 1 - \frac{S}{R} p(q_k^{1/p} - 1)$$

$$f^{'}(q_k) = nq_k^{n-1} - \frac{S}{R}\left(q_k^{(1/p)-1}\right)$$

$$q_{k+1} = q_k - \frac{f(q_k)}{f^{'}(q_k)}$$

Замечания:

1) Начальную оценку $q_0=1+i_0$, требующуюся для начала итеративной процедуры следует выбирать такой, чтобы соответствующий ей множитель наращения был как можно ближе к заданному отношению S/R. Это сократит число итераций и обеспечит сходимость алгоритма.

2) Остановка вычислений осуществляется после того как проверка, заключающаяся в сравнении множителя наращения и отношения S/R, свидетельствует об их совпадении с достаточной (наперед заданной) точностью.

Теперь будем считать, что известна современная стоимость A и найдена какая-то подходящая начальная оценка процентной ставки.

А) Постоянная годовая рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, p=1, m=1.

Требуется решить уравнение вида

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A}{R} = a_{n;i} \quad \text{или} \quad \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - a_{n;i} = 0$$

Здесь также используем обозначение $q=1+i$, и после умножения обеих частей равенства на (q-1) получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k) = q_k^{-n} - 1 + \frac{A}{R}(q_k - 1)$$

$$f^{'}(q_k) = \frac{A}{R} - nq_k^{-(n+1)}$$

$$q_{k+1} = q_k - \frac{f(q_k)}{f^{'}(q_k)}$$

Б) Постоянная p-срочная рента постнумерандо, проценты начисляются один раз в конце года, $p\geq 1$, m=1.

Требуется решить уравнение вида

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]} = \frac{A}{R} = a_{n,i} \quad \text{или} \quad .\frac{1-(1+i)^{-n}}{p[(1+i)^{1/p}-1]} - a_{n,i} = 0\,.$$

Сделав подстановку $q=1+i$, получим алгоритм уточнения оценки на каждом шаге k, состоящий из следующих трех операций:

$$f(q_k) = q_k^{-n} - 1 + \frac{A}{R} p(q_k^{1/p} - 1)$$

$$f'(q_k) = \frac{A}{R} q_k^{(1/p)-1} - nq_k^{-(n+1)}$$

$$q_{k+1} = q_k - \frac{f(q_k)}{f'(q_k)}.$$

1.7 Другие виды постоянных рент

Вечная рента

Под вечной рентой понимается последовательность платежей, число членов которой не ограничено, то есть она выплачивается бесконечное число лет (например, выплаты по бессрочным облигационным займам). В этом случае наращенная сумма с течением времени возрастает бесконечно. А вот современная величина имеет вполне определенное конечное значение.

Рассмотрим, например, бесконечную постоянную годовую ренту постнумерандо (p=1, m=1).

При n→∞ $\lim A = \lim R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}$

В общем случае, когда $p \geq 1$, $m \geq 1$

при n→∞ $\lim\ A = R \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]} = \frac{R}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}$.

Если же $p \geq 1$, $m \geq 1$ и $p = m$, то

при $n \to \infty$ $\lim\ A = R \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]} = \frac{R}{j}$.

Отложенная рента

Начало отложенной (или отсроченной) ренты отодвигается от момента заключения сделки на какой-то момент в будущем. Наращенная сумма такой ренты может быть подсчитана по тем формулам, которые нам уже известны. А ее современную величину можно определить в два этапа: сначала найти современную величину соответствующей немедленной ренты (эта сумма характеризует ренту на момент начала ее срока), а затем с помощью дисконтирования этой величины по принятой ставке в течение срока задержки привести ее к моменту заключения договора.

Например, если современная величина годовой немедленной ренты равна А, то современная величина отложенной на t лет ренты составит

$A_t = Av^t$,

где v^t - дисконтный множитель за t лет, v=1/(1+i)<1.

Рента пренумерандо

Рассмотрим теперь ренту, когда платежи производятся в начале каждого периода, - ренту пренумерандо. Различие между рентой постнумерандо и рентой пренумерандо заключается лишь в том, что у последней на один период начисления процентов больше. В остальном структура потоков с одинаковыми параметрами одинакова. Поэтому наращенные суммы обоих видов рент (с одинаковой периодичностью платежей и начисления процентов и размером выплат) тесно связаны между собой.

Если обозначить через $\ddot{S}$ наращенную сумму ренты пренумерандо, а через S, как и раньше, наращенную сумму соответствующей ренты постнумерандо, то в самом общем случае получим

$$\ddot{S} = S(1 + j/m)^{m/p}.$$

Точно также для современной величины ренты пренумерандо и соответствующей ей ренты постнумерандо имеем следующее соотношение

$$\ddot{A} = A(1 + j/m)^{m/p}.$$

Рента с платежами в середине периодов

Наращенная сумма ($S_{1/2}$) и современная стоимость ($A_{1/2}$) ренты с платежами в середине периодов и соответствующей ренты постнумерандо связаны так

$S_{1/2}=S(1+j/m)^{m/p}$ и $A_{1/2}=A(1+j/m)^{m/(2p)}$.

1.8 Анализ переменных потоков платежей

Нерегулярный поток платежей

Временные интервалы между последовательными платежами в нерегулярном потоке могут быть любыми, не постоянными, любыми могут быть так же и члены потока. Обобщающие характеристики в этом случае получают только путем прямого счета:

наращенная сумма $S = \sum_t R_t (1+i)^{n-t}$,

современная величина $\sum_t R_t v^t$,

где t- время от начала потока платежей до момента выплаты, R_t – сумма платежа.

Переменная рента с разовыми изменениями размеров платежа

Пусть общая продолжительность ренты n и этот срок разбит на k участков продолжительностью $n_1, n_2, \ldots, n_k$, в каждом из которых член ренты постоянен и равен R_t, t=1, 2, …, k, но изменяется от участка к участку.

Тогда наращенная сумма для годовой ренты постнумерандо (p=1, m=1) вычисляется по формуле

$$S = R_1 s_{n_1,i}(1+i)^{n-n_1} + R_2 s_{n_2,i}(1+i)^{n-(n_1+n_2)} + \ldots + R_k s_{n_k,i}$$

а современная величина как

$$A = R_1 a_{n_1,i} + R_2 a_{n_2,i} v^{n_1} + ... + R_k a_{n_k,i} v^{n-n_k}.$$

Рента с постоянным абсолютным приростом платежей

Пусть размер платежей изменяется с постоянным приростом *a* (положительным или отрицательным). Если рента годовая постнумерандо, то размеры последовательных платежей составят *R*, *R+a*, *R+2a,...*, *R+(n-*1*)a*. Величина *t*-го члена равна $R_t=R+(t-1)a$.

Тогда современная стоимость такой ренты равна

$$A = \left(R + \frac{a}{i}\right)a_{n,i} - \frac{nav^n}{i},$$

а наращенная сумма

$$S = \left(R + \frac{a}{i}\right)s_{n,i} - \frac{na}{i}.$$

В случае *p*-срочной ренты с постоянным приростом платежей (*m*=1) последовательные выплаты равны $R, R + \frac{a}{p}, R + 2\frac{a}{p}, ..., R + (pn-1)\frac{a}{p}$, где *a* – прирост платежей за год, *R* – первый платеж, то есть

$R_t = R + (t-1)\frac{a}{p}$, где *t* – номер члена ряда, *t*=1, 2, … , *np*.

Современная величина

$$A = \sum_{t=1}^{pn}\left(R + \frac{a(t-1)}{p}\right)v^{t/p},$$

а наращенная сумма

$$S = \sum_{t=1}^{pn}\left(R + \frac{a(t-1)}{p}\right)(1+i)^{n-t/p}.$$

Ренты с постоянным относительным изменением платежей

Если платежи годовой ренты изменяются с постоянным темпом роста *q*, то члены ренты будут представлять собой ряд: $R, Rq, \dots, Rq^{n-1}$. Величина *t*-го члена равна $R_t=Rq^{t-1}$.

Для того чтобы получить современную величину, дисконтируем эти величины:

$Rv, Rqv^2,.., Rq^{n-1}v^n$. Мы получили геометрическую прогрессию.

Сумма этих величин равна

$$A = Rv\frac{q^n v^n - 1}{qv - 1} = R\frac{q^n v^n - 1}{q - (1+i)}.$$

Наращенная сумма

$$S = A(1+i)^n = R\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}.$$

Для p-срочной ренты (m=1):

$$A = R\frac{q^{np}v^{n} - 1}{q - (1+i)^{1/p}}$$

$$S = R\frac{q^{np} - (1+i)^{n}}{q - (1+i)^{1/p}}$$

1.9 Конверсия аннуитетов

В практике иногда возникает необходимость изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату аннуитетов, то есть конвертировать ренту. Рассмотрим некоторые типичные ситуации.

Выкуп ренты

Выкуп ренты представляет собой замену предстоящей последовательности выплат единовременным платежом. Из принципа финансовой эквивалентности следует, что в этом случае вместо ренты выплачивается ее современная величина.

Рассрочка платежей

Это замена единовременного платежа аннуитетом. Для соблюдения принципа финансовой эквивалентности современную величину ренты следует приравнять величине заменяемого платежа. Далее задача обычно сводится к определению члена ренты или ее срока при остальных заданных параметрах.

Замена немедленной ренты на отсроченную

Пусть имеется годовая немедленная рента с параметрами R_1, n_1, i и ее необходимо заменить на отсроченную на t лет ренту, то есть начало ренты сдвигается на t лет. Обозначим параметры отложенной ренты как R_2, n_2, i. Ставку процентов при этом будем считать неизменной. Тогда может быть два типа расчетных задач.

1. Задан срок n_2, требуется определить размер R_2.

Исходим из принципа финансовой эквивалентности результатов, то есть из равенства современных стоимостей заменяемого и заменяющего потоков: A_1=A_2. Раскрывая это равенство, получаем

$$R_1 a_{n_1,i} = R_2 a_{n_2,i} v^{-t}$$

то есть

$$R_2 = R_1\left(\frac{a_{n_1,i}}{a_{n_2,i}}\right)(1+i)^{t}$$

В частном случае, когда n_1=n_2=n, решение упрощается и принимает следующий вид

$$R_2=R_1(1+i)^t$$

2. Размеры платежей заданы, требуется определить срок n_2. Рассмотрим частный случай, когда платежи годовой ренты остаются теми же $R_2=R_1=R$.

Исходя из равенства современных стоимостей,

$$R\ a_{n_1,i} = Ra_{n_2,i}v^{-t}\ ,$$

где $a_{n,i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$,

последовательно приходим к выражению

$$n_2 = \frac{-\ln[1-(1-(1+i)^{-n_1})(1+i)^t]}{\ln(1+i)}\ .$$

Изменение продолжительности ренты

Пусть имеется годовая обычная рента, и у партнеров есть договоренность об изменении срока ренты, то есть вместо срока n_1, принят новый срок n_2. Тогда для эквивалентности финансовых результатов требуется изменение и размера платежа. Найдем его из равенства

$$R_1 a_{n_1,i} = R_2 a_{n_2,i}\,,$$

из которого следует, что

$$R_2 = R_1\frac{a_{n_1,i}}{a_{n_2,i}} = R_1\frac{1-(1+i)^{-n_1}}{1-(1+i)^{-n_2}}\ .$$

Общий случай изменения параметров ренты

В случае одновременного изменения нескольких параметров ренты, исходим из равенства $A_1=A_2$. Если рассматривается годовая рента, то приводится к виду

$$A_1 = R_2\frac{1-\left(1+\dfrac{j_2}{m_2}\right)^{-m_2 n_2}}{p_2\left[\left(1+\dfrac{j_2}{m_2}\right)^{m_2 p_2}-1\right]}\,,$$

где A_1 подсчитывается заранее, ряд параметров задается по согласованию сторон, и один параметр находится из этого уравнения.

Объединение рент

В случае объединения (консолидации) нескольких рент в одну из принципа финансовой эквивалентности обязательств до и после операции следует, что

$$A = \sum_k A_k\ ,$$

где A- современная величина заменяющей ренты,

A_k – современная величина k-ой объединяемой ренты.

Раздел II. Кредитные операции

Доходы от финансово-кредитных операций и различных коммерческих сделок могут представать в виде: процентов, комиссионных, дисконта при учете векселей, дохода от ценных бумаг (дивиденда, платежа по купону, курсовой разности). Причем в одной операции может быть предусмотрено несколько видов дохода.

Отметим, что при получении кредита должник может оплачивать комиссионные или другие разовые расходы (посреднику), которые увеличивают цену кредита, но не меняют доходность кредитора.

2.1 Долгосрочные кредиты

Рассмотрим баланс долгосрочной финансово-кредитной операции, используя контур финансовой операции (начисление процентов по сложной ставке).

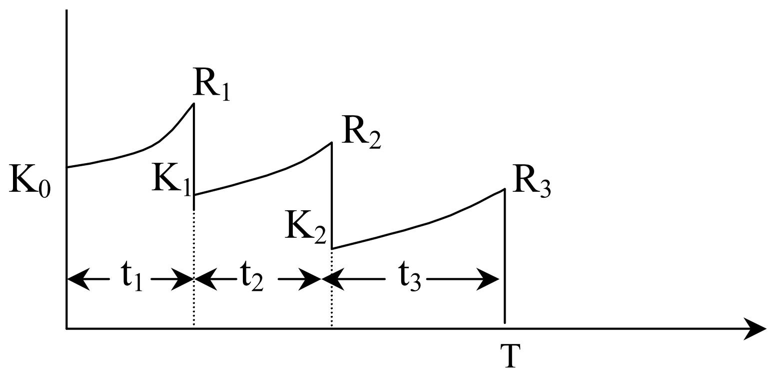


Рис. 2.1. Контур кредитной операции

Для контура, показанного на рис.2.1, получим следующие расчетные формулы

$$K_1 = K_0(1+i)^{t_1} - R_1,$$

$$K_2 = K_1(1+i)^{t_2} - R_2,$$

$$K_2(1+i)^{t_3} - R_3 = 0,$$

где K_0 - первоначальная сумма долга, R_1 и R_2 –промежуточные платежи, R_3 –последний платеж. Последнее уравнение является балансовым. Выразим K_2 через K_0 и подставим его в балансовое уравнение

$$\left[\left(K_0 q^{t_1} - R_1\right)q^{t_2} - R_2\right]q^{t_3} - R_3 = 0,$$

которое нетрудно привести к следующему виду

$$K_0 q^T - (R_1 q^{t_2+t_3} + R_2 q^{t_3} + R_3) = 0,$$

где $T=\Sigma t_j$, $q=1/(1+i)$.

В этом уравнении методологически ясно представлены два процесса: наращение первоначальной задолженности за весь период и наращение погасительных платежей за срок от момента платежа до конца срока операции. Таким образом, полученное уравнение отражает баланс сумм, наращенных на момент времени T. Умножим это уравнение на дисконтный множитель v^T

$$K_0 - (R_1 v^{t_1} + R_2 v^{t_1+t_2} + R_3 v^T) = 0\,,$$

В этом виде уравнение выражает равенство суммы современных величин погасительных платежей сумме кредита, то есть баланс современных величин.

Эти уравнения нетрудно обобщить на случай n погасительных платежей. Методы оценки показателей доходности для разных видов ссудно-кредитных операций основываются на соответствующем балансовом уравнении. Если погасительные платежи осуществляются периодически постоянными или переменными суммами, то они образуют постоянную или переменную ренту, параметры которых могут быть рассчитаны обычным образом.

2.2 Доходность ссудных и учетных операций, предполагающих удержание комиссионных

Ссудные операции. За открытие кредита, учет векселей и другие операции кредитор часто взимает комиссионные, которые повышают доходность операций, так как размер фактически выданной ссуды сокращается.

Пусть ссуда в размере D выдана на срок n, и при ее выдаче из нее удерживаются комиссионные в размере G. Фактически выданная ссуда равна D-G.

Рассмотрим сначала сделки с начислением простых процентов по ставке i. Обозначим через $i_{э,пр}$ – фактическую доходность, выраженную через ставку простых процентов, и пусть g – относительная величина комиссионных в сумме кредита, то есть $G=Dg$. Тогда из балансового уравнения

$$D(1-g)(1+n\, i_{э,пр})=D(1+ni)$$

находим

$$i_{э,пр} = \frac{1+ni}{(1-g)n} - \frac{1}{n}$$

Теперь рассмотрим долгосрочную операцию, когда ссуда с удержанием комиссионных выдается под сложные проценты. Тогда балансовое уравнение имеет вид

$$(D-G)(1+i_{э,\,сл})^n=D(1+i)^n$$

$D(1-g)(1+i_{э,\,сл})^n=D(1+i)^n$, так как $G=Dg$.

Откуда

$$i_{э,сл} = \frac{1+i}{\sqrt[n]{(1-g)}} - 1\,.$$

Учетные операции. Рассмотрим полную доходность банка при осуществлении операции учета с удержанием комиссионных.

Пусть при учете применяется простая учетная ставка. После удержания комиссионных и дисконта заемщик получает сумму *D-Dnd-G*. Если *G=Dg*, то эта сумма составит *D(1-nd-g)*. Балансовое уравнение принимает вид

$$D(1-nd-g)(1+ni_{э,\,пр})=D$$

Откуда полная доходность

$$i_{э,пр}=\frac{1}{(1-nd-g)n}-\frac{1}{n}.$$

2.3 Форфейтная кредитная операция

Эта операция получила распространение во внешней торговле, но может применяться и во внутренней торговле страны. Потребность в такой операции возникает когда покупатель приобретает товар не имея соответствующих денежных средств, а продавец также не может продать товар в кредит. Тогда в рамках форфейтной операции покупатель выписывает комплект векселей на сумму, равную стоимости товара плюс проценты за кредит, который формально предоставляется покупателю продавцом. Сроки векселей равномерно распределены во времени обычно через равные интервалы (полугодия). Продавец сразу же после получения портфеля векселей учитывает его в банке без права оборота на себя, получая полностью деньги за свой товар. Банк, форфетируя сделку, берет весь риск на себя. Иногда в качестве четвертого агента сделки может выступать банк покупателя, гарантирующий погашение задолженности по векселям. Поскольку платежи по векселям представляют собой постоянную ренту, то и расчет таких операций опирается на уже полученные нами результаты.

2.4 Ипотечные ссуды

Ссуды под залог недвижимости являются одним из важных источников долгосрочного финансирования. В такой сделке владелец имущества получает ссуду у залогодержателя и в качестве обеспечения возврата долга передает последнему право на преимущественное удовлетворение своего требования из стоимости заложенного имущества в случае отказа от погашения или неполного погашения задолженности. Сумма ссуды обычно несколько меньше оценочной стоимости закладываемого имущества. В США, например, запрещено, за некоторыми исключениями, выдавать ссуды, превышающие 80% оценочной стоимости имущества. Наиболее распространенными объектами залога являются жилые дома, фермы, земля, другие виды недвижимости. Ипотечные ссуды выдаются коммерческими банками и специальными ипотечными банками, ссудно-сберегательными ассоциациями. Характерной особенностью ипотечных ссуд является длительный срок погашения – в США до 30 и более лет. Поскольку платежи по обслуживанию долга, то есть по уплате процентов и погашению предоставленного кредита, являются регулярными, то и расчет ипотеки сводится к расчету параметров того или иного вида ренты. Основной задачей расчета является разработка планов погашения и остатка задолженности на любой момент времени.

Существует несколько видов ипотечных ссуд, различающихся в основном методами погашения задолженности.

Стандартная ипотека

Наиболее распространена стандартная или типовая ипотечная ссуда, существо которой сводится к тому, что заемщик получает от залогодержателя, то есть кредитора, некоторую сумму под залог недвижимости. Этот кредит он погашает вместе с процентами равными, обычно ежемесячными, взносами.

Ссуды с ростом платежей

В этом случае предусматривается постоянный рост расходов по обслуживанию долга в первые 5-10 лет. Затем погашение производится постоянными взносами. Расчет сводится к применению формул для рент с переменными и постоянными платежами в соответствующие интервалы времени.

Ссуды с периодическим увеличением взносов

По согласованному графику каждые 3-5 лет сумма взносов увеличивается. Таким образом поток платежей представляет собой последовательность постоянных рент.

Ссуда с льготным периодом

В такой ипотеке предполагается наличие льготного периода, в течение которого выплачиваются только проценты по долгу.

Ссуда с залоговым счетом

В этой схеме предполагается, что клиент в начале операции вносит на специальный (залоговый) счет некоторую сумму денег. На начальных этапах он выплачивает кредитору погасительные взносы, которые меньше тех, что необходимы по стандартной ипотеке. Недостающие суммы добавляются путем списания с залогового счета, пока он не иссякнет. Таким образом кредитор все время получает постоянные взносы, как и в стандартной ипотеке. А взносы должника характеризуются ростом во времени.

Ссуды с периодическим изменением процентной ставки

Эта схема предполагает, что стороны каждые 3-5 лет пересматривают уровень процентной ставки с целью адаптации к условиям рынка.

Ссуда с переменной процентной ставкой

Здесь уровень ставки привязывается к какому-либо распространенному финансовому показателю или индексу. Пересмотр обычно осуществляется по полугодиям. Чтобы избежать чрезмерных скачков, предусматривается верхняя и нижняя границы разовых корректировок (например, не более 2%).

Ипотека с обратным аннуитетом

Предназначена для заклада домов пожилыми владельцами (продажа в рассрочку с правом дожития). Цель такого залога – получение систематического дохода владельцем жилища.

2.5. Льготные займы и кредиты

В ряде случаев долгосрочные займы и кредиты выдаются на льготных для заемщика условиях. Низкая процентная ставка по сравнению с рыночной в сочетании с большим сроком и наличием льготного периода дают должнику существенную выгоду, которую можно рассматривать как субсидию. Такая субсидия оказывается как на международном уровне в рамках финансовой помощи развивающимся странам, так и внутри страны для поддержки отдельных отраслей или производств. Проблема определения размера этой помощи сводится к оценке грант-элемента.

Грант-элемент – это условная субсидия кредитора, связанная с применением более низкой процентной ставки. Грант-элемент определяется в двух видах: в виде абсолютной и относительной величины.

Абсолютный грант-элемент рассчитывается как разность суммы займа и современной величины платежей по погашению займа. Проблема здесь состоит в выборе ставки процентов для расчета современной величины платежей. Обычно используют ставку, применяемую на рынке долгосрочных кредитов.

Абсолютный грант-элемент находится как

$$W=D-G,$$

А относительный грант-элемент как

$$w=\frac{W}{D}=1-\frac{G}{D},$$

где W – абсолютный грант-элемент,

w – относительный грант-элемент,

D – сумма кредита,

G – современная величина платежей, рассчитанная по реальной ставке рынка кредитов.

Раздел III. Потоки платежей в производственной деятельности

3.1 Определение оптимального уровня денежных средств

Денежные средства предприятия включают в себя деньги в кассе и на расчетном счете в коммерческих банках. Эти средства необходимы предприятию в денежной форме для осуществления текущих платежей по поставкам сырья, оборудования, услуг. В качестве цены за поддержание необходимого уровня денежных средств принимают возможный (упущенный) доход от инвестирования среднего остатка в государственные ценные бумаги, как в безрисковые. Таким образом встает задача определения оптимального запаса денежных средств, минимизирующего издержки, связанные с поддержанием уровня ликвидности. Для решения этой задачи часто применяются модели, разработанные в теории управления. На Западе наибольшее распространение получили модель Баумоля (1952) и Модель Миллера-Орра (1966).

Модель Баумоля

Предполагается пилообразный график изменения остатка средств на расчетном счете предприятия, см. рис. 3.1.

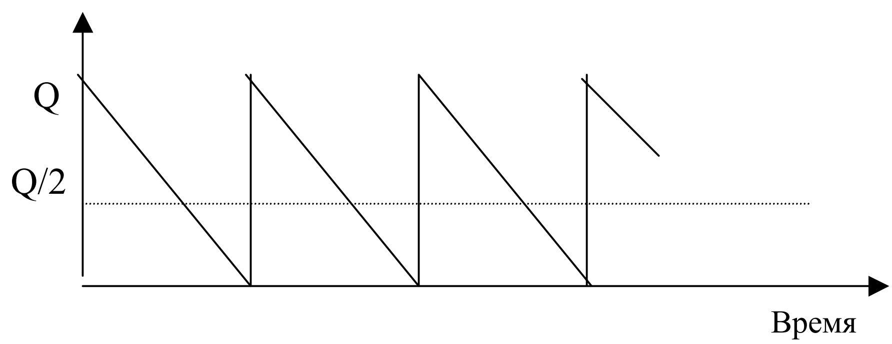


Рис. 3.1. Остаток средств на расчетном счете предприятия

Предприятие начинает работать, имея некоторый разумный запас денежных средств Q. Затем расходует их в течение некоторого периода времени. Все средства, поступающие от реализации товаров и услуг предприятие вкладывает в краткосрочные ценные бумаги. Как только запас денежных средств достигает нулевого или минимально допустимого уровня, предприятие продает ценные бумаги с тем чтобы восстановить первоначальный запас денежных средств *Q*.

Алгоритм расчета следующий.

Сумма Q вычисляется по формуле

$$Q = \sqrt{\frac{2Vc}{r}},$$

где V – прогнозируемая потребность в денежных средствах в периоде (годе),

c – расходы по конвертации ценных бумаг в денежные средства,

r – процентный доход по краткосрочным вложениям в ценные бумаги.

Средний запас денежных средств составляет Q/2, а общее количество сделок по конвертации ценных бумаг в денежные средства за период равно $K=V/Q$.

Общие расходы по реализации такой политики управления денежными средствами составят $R=ck+rQ/2$.

Модель Миллера-Орра

Недостаток предыдущей модели в том, что в ней предполагается равномерный расход денежных средств. В действительности такое встречается редко. В модели, разработанной Миллером и Орром, исходят из того, что предсказать каждодневный отток и приток денежных средств невозможно. Авторы используют при построении модели процесс Бернулли – стохастический процесс, в котором поступление и расходование денег от периода к периоду являются независимыми случайными событиями. Управление остатком средств на р/с может быть проиллюстрировано на графике, см. рис. 3.2.

Рис. 3.2. Управление запасом денежных средств на р/с.

Остаток средств на расчетном счете хаотически меняется до тех пор, пока не достигает верхнего предела $Q_в$. В этот момент предприятие начинает покупать ценные бумаги с тем, чтобы вернуть запас денежных средств к нормальному уровню (к точке возврата $T_в$). Если запас достигает нижнего предела $Q_н$, то предприятие продает свои ценные бумаги пока не восстановит нормальный уровень запаса.

Алгоритм построения модели складывается из следующих шагов.

1. Экспертным путем задается минимальный предел денежных средств $Q_н$

2. По статистическим данным определяется дисперсия V ежедневных колебаний денежного потока.

3. Определяются расходы P_x по хранению средств на р/с, обычно их выражают в виде ставки ежедневного дохода по краткосрочным ценным бумагам, и расходы P_m по взаимной трансформации денежных средств и ценных бумаг – операционные издержки (предполагаются постоянными).

4. Рассчитывается размах вариации остатка

$$S = 3\sqrt[3]{\frac{3P_m V}{4P_x}}$$

5. Рассчитывают верхнюю границу денежных средств на р/с

$Q_в=Q_н+S$

6. Определяют точку возврата $T_в$ – нормальный уровень запаса

$T_в=Q_н+S/3$

3.2. Показатели эффективности производственных инвестиций

В инвестиционном процессе имеется два потока: потока инвестиций и последовательное получение дохода. Эти два потока могут следовать один за другим, между ними может быть некоторый разрыв или наложение во времени. При изучении эффективности инвестиций оба эти потока могут рассматриваться и сопоставляться по отдельности или как одна последовательность. В последнем случае инвестиционные расходы включаются в поток с отрицательным знаком.

Под чистым доходом понимают общий доход (выручку), полученный в каждом временном отрезке, за вычетом всех платежей, связанных с его созданием и получением. В эти платежи входят прямые и косвенные расходы по оплате труда и материалов, налоги. Элемент объединенного потока инвестиций и доходов в момент t определяется следующим образом:

$$R_t=(G_t-C_t)-(G_t-C_t-D_t)T-K_t+S,$$

где R_t - элемент потока наличности,

G_t – ожидаемый брутто-доход от реализации проекта, например, объем выручки от продажи продукции,

C_t – общие текущие расходы, прямые и косвенные (амортизационные отчисления сюда не включаются),

D_t – расходы, на которые распространяются налоговые льготы,

T – налоговая ставка,

K_t – инвестиционные расходы,

S_t – различные виды компенсаций, дотаций.

Анализ производственных инвестиций в основном заключается в оценке и сравнении эффективности альтернативных инвестиционных проектов. В качестве измерителей обычно используются характеристики, основанные на дисконтировании потоков ожидаемых поступлений и расходов и приведении их к одному моменту времени. Ставку, по которой производится дисконтирование, называют ставкой сравнения. При выборе ставки сравнения ориентируются на существующий или ожидаемый уровень ссудного процента и корректируют ее с учетом ожидаемого риска. Ясно, что будущая ставка является не вполне определенной величиной, поэтому расчеты носят условный характер и могут выполняться не для одного, а для нескольких значений ставки.

В финансовом анализе обычно применяют четыре показателя эффективности инвестиций:

1. чистый приведенный доход (ЧПД, по-английски NPV – Net Present Value),
2. срок окупаемости (payback method),
3. внутренняя норма доходности (Internal Rate of Return – IRR),
4. рентабельность.

Чистый приведенный доход

Этот показатель часто считается основным. Будем обозначать его как NPV. Эта величина характеризует конечный абсолютный результат, рассчитываемый как разность дисконтированных на один момент времени показателей дохода и капиталовложений, то есть

$$NPV = \sum R_t v^t,$$

где R_t – член потока платежей (объединенного потока инвестиций и доходов),

v – дисконтный множитель, $v=1/(1+q)$, где q – ставка сравнения.

Если инвестиции и доходы равномерные и дискретные, то W можно найти как разность современных величин двух рент (одной, представляющей инвестиции, и другой, отсроченной до начала периода отдачи, представляющей поток доходов).

Несмотря на то, что этот показатель чистого приведенного дохода является основой для определения других измерителей эффективности, у него есть ряд существенных недостатков. Один недостаток его состоит в том, что он предполагает известными все будущие члены потока, что на практике нереально. Кроме того, являясь абсолютным показателем, он не дает представления об относительной эффективности вложения финансовых средств.

Срок окупаемости

Под сроком окупаемости в финансовом анализе понимают продолжительность периода, в течение которого сумма чистых доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, равна сумме приведенных на этот же момент инвестиций.

Если приведенная сумма инвестиций составляет K, а доход поступает в конце каждого года, то расчет срока окупаемости сводится к тому, что сначала определяется сумма

$$S_m = \sum_{t=1}^{m} R_t v^t ,$$

удовлетворяющая условию $S_m<K<S_{m+1}$. Срок окупаемости равен m лет плюс некоторая доля ($m+1$) – го года, примерно равная

$$\frac{K - S_m}{R_{m+1} v^{m+1}} .$$

Если поток доходов представляет собой ренту, то срок окупаемости находится путем приравнивания капиталовложений современной величине финансовой ренты, представляющей доходы, и решения этого уравнения относительно срока n.

Основной недостаток этого показателя в том, что он не учитывает доходы, поступающие за пределами срока окупаемости.

Внутренняя норма доходности

Под внутренней нормой доходности (*IRR*) понимают ту расчетную ставку процентов, применение которой к инвестициям порождает данный поток доходов. Чем выше эта ставка (мы ее будем обозначать *IRR*), тем больше эффективность капитальных вложений. Если капиталовложения осуществляются только за счет привлеченных средств, причем кредит получен по ставке i, то разность ($IRR-i$) показывает эффект предпринимательской деятельности. При $IRR=i$ доход только окупает инвестиции, при $IRR<i$ инвестиции для предпринимателя убыточны.

Внутренняя норма доходности *IRR* определяется в общем случае путем решения уравнения

$$\sum_t R_t v^t = 0 ,$$

где $v=1/(1+IRR)$, R_t – член объединенного потока инвестиций и доходов. Уравнение имеет нелинейный вид и решается итеративно методом линейной интерполяции или другими приближенными методами.

За рубежом расчет внутренней нормы доходности часто применяют в качестве первого шага количественной оценки эффективности капиталовложений. Для дальнейшего анализа отбирают те инвестиционные проекты, у которых этот показатель не ниже 15-20%.

В последние 15 лет в анализе эффективности капиталовложений применяется модифицированный показатель внутренней нормы доходности *MIRR*. В литературе описаны различные варианты построения этого показателя.

Рентабельность

Этот показатель представляет собой отношение приведенных по ставке сравнения доходов к приведенным на ту же дату капиталовложениям. Иногда этот показатель называют индексом рентабельности. Обозначим его символом U. Если период отдачи начинается через n лет после начала инвестирования, то этот показатель определяется как

$$U = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} R_j v^{j+n}}{\sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t},$$

где R_j – показатель чистого дохода в году j, $j=1,2,...,n_2$, n_2 – период отдачи,

K_t – размер инвестиций в году t, $t=1,2,...,n_1$, n_1 – инвестиционный период,

$v=1/(1+q)$, q – ставка сравнения.

Этот показатель характеризует некоторую дополнительную рентабельность, так как при его расчете доходы уже дисконтированы по ставке сравнения. Если $U=1$, то доходность капиталовложений точно соответствует нормативу рентабельности q. Если $U<1$, то инвестиции нерентабельны, так как не обеспечивают этот норматив.

3.3. Аренда оборудования (лизинг)

Аренда оборудования является одним из видов производственного инвестирования. Перед владельцем оборудования стоит задача правильного определения размера арендной платы и финансовой эффективности сдачи оборудования в аренду, а арендатор должен решить вопрос: что выгоднее, арендовать оборудование или купить его.

Соглашение об аренде длительностью год или более, предусматривающее серии фиксированных выплат, называется лизингом. Некоторые виды лизинга являются краткосрочными и могут быть расторгнуты арендатором, такой лизинг называется операционным. Другие виды лизинговых соглашений заключаются на большую часть предполагаемой экономической жизни имущества и не могут быть расторгнуты либо предусматривают возмещение убытков арендодателю (лизингодателю) при расторжении. Такой лизинг называется финансовым, капитальным, или лизингом с полной выплатой. Лизинговые соглашения регулируются национальным законодательством, предусматривающим различные ограничения, порядок амортизации и налоговые льготы.

Определение размера платежа за аренду оборудования может быть выполнено по следующей схеме. Пусть оборудование стоимостью P сдается в аренду на n лет. Остаточная стоимость в конце срока составит S. Будем исходить из того, что поток платежей от арендатора должен возместить сумму износа с учетом фактора времени, то есть обеспечить заданный норматив доходности на вложенные в оборудование средства. Для случая, когда арендная плата вносится один раз в конце года, размер разового арендного платежа найдем как

$$R = \frac{P - Sv^n}{a_{n,i}},$$

где R – размер годового арендного платежа,

$a_{n,i}$ – коэффициент приведения годовой постоянной ренты,

$v = \frac{1}{1+i}$ - дисконтный множитель,

i – принятый норматив доходности,

n – срок аренды.

Если условия выплат другие, то применяются коэффициенты приведения соответствующих рент

Раздел IV. Потоки платежей в условиях риска и неопределенности

До сих пор при анализе потоков платежей мы считали размеры всех платежей известными, а выплаты безусловными. Теперь рассмотрим ситуацию, когда размер платежа задается своим законом распределения, и случай, когда поступление платежа имеет определенную вероятность.

4.1. Неопределенность размеров платежа

Сначала рассмотрим первую ситуацию. Будем для простоты считать, что распределения членов потока одинаковые нормальные, независимые, то есть среднее значение $\overline{R}$, дисперсия D_0. Современная стоимость такого потока

$$A = \sum R_t v^t \text{ ,}$$

его среднее значение (математическое ожидание) равно

$$E(A) = \overline{A} = E(\sum R_t v^t) = \overline{R}\sum v^t = \overline{R}a_{n,i} \text{ .}$$

Дисперсия каждого члена потока, приведенного к началу ренты, равно

$$D(R_t v^t) = E(R_t v^t - \overline{R}v^t)^2 = D_0 v^{2t} \text{ ,}$$

а дисперсия современной величины потока есть сумма такого рода дисперсий, то есть

$$D_A = D_0 \sum_{t=1}^{n} (v^{2t}) = D_0 d_{n,i} \text{ ,}$$

где $d_{n,i} = \sum v^{2t} = \dfrac{1-(1+i)^{-2n}}{(1+i)^2 - 1}$

Отсюда стандартное отклонение определяется как

$$\sigma_A = \sigma_0 \sqrt{\sum d_{n,i}} \text{ ,}$$

где $\sigma_0 = \sqrt{D_0}$.

Предположение о нормальности распределений слагаемых означает нормальность распределения А. Тогда нетрудно оценить с заданной вероятностью границы, в которых находится величина современной стоимости потока платежей. Такие границы определяются как

$$\overline{A} \pm z\sigma_A \text{ ,}$$

где величина z находится по таблицам нормального закона распределения.

4.2. Риск невозврата

Пусть выплата каждого члена потока платежей R_t не безусловна, а имеет некоторую вероятность p_t. Математическое ожидание современной стоимости такого потока с учетом вероятностей выплат составит

$$A = \sum_t p_t R_t v^t \ .$$

На этой формуле построены все расчеты, связанные с риском неплатежей, анализ, проводимый во всех разделах страховой математики.

Заключение

В заключение отметим, что многие финансовые расчеты могут быть выполнены в широко распространенном пакете Excel. В этом программном продукте имеется 52 функции для выполнения финансовых расчетов. Отметим, однако, что в русской версии пакета первоначальные названия функций, основанные на аббревиатуре международных терминов и известные всем специалистам, переведены на русский язык и это затрудняет работу с ними. К тому же помощь (Help) неудовлетворительно переведена на русский язык, что может приводить к недоразумениям.

Глоссарий

Аннуитет – см. **финансовая рента**

Актуарный метод расчета - один из двух методов расчета процентов и определения остатка долга при погашении краткосрочной задолженности частичными платежами (см. *правило торговца*)

Брутто-ставка - ставка процентов, скорректированная на инфляцию

Внутренняя норма доходности – расчетная ставка процентов, применение которой к инвестициям порождает соответствующий поток доходов

Дисконт или **скидка** - проценты в виде разности $D=S-P$, где S - сумма на конец срока, P - сумма на начало срока

Дисконтирование суммы S - расчет ее текущей стоимости P

Дисконтный множитель - коэффициент, показывающий какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга (наращенной сумме)

Индекс покупательной способности денег - равен обратной величине индекса цен

Индекс цен показывает во сколько раз выросли цены за указанный промежуток времени

Инфляционная премия - корректировка ставки процентов для компенсации обесценения денег

Капитализация процентов - присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения

Контур финансовой операции - графическое изображение процесса погашения краткосрочной задолженности частичными (промежуточными) платежами

Коэффициент наращения ренты - отношение наращенной суммы ренты к сумме ее годовых платежей или к размеру отдельного платежа

Коэффициент приведения ренты - отношение современной стоимости ренты к сумме ее годовых платежей или к размеру отдельного платежа

Математическое дисконтирование - вид дисконтирования, представляющий собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды

Множитель наращения - коэффициент, который показывает во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной

Наращение или **рост** первоначальной суммы - процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга

Наращенная сумма потока платежей - сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты

Наращенная сумма ссуды (долга, депозита, других видов инвестированных средств) - первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока

Переменная рента - рента с изменяющимися членами

Период начисления - интервал времени, к которому относится (применяется) процентная ставка

Период ренты - временной интервал между двумя соседними платежами

Постоянная рента - рента с равными членами

Поток платежей - ряд последовательных выплат и поступлений

Правило торговца - один из двух методов расчета процентов и определения остатка долга при погашении краткосрочной задолженности частичными платежами (см. *актуарный метод расчета*)

Практика расчета простых процентов различает три варианта расчета: (1) точные проценты с точным числом дней ссуды (британская практика); (2) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (французская практика); (3) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (германская практика)

Приведение - это определение любой стоимостной величины на некоторый момент времени. Если некоторая сумма приводится к более ранней дате, чем текущая, то применяется дисконтирование, если же речь идет о более поздней дате, то - наращение

Принцип неравноценности денег - деньги, относящиеся к разным моментам времени имеют различную текущую стоимость

Процент обыкновенный или **коммерческий** получают, когда за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом)

Процент точный получают, когда за базу измерения времени берут действительное число дней в году: 365 или 366

Процентная ставка - отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени к величине ссуды. Ставка измеряется в процентах, в виде десятичной или натуральной дроби

Процентные деньги или, кратко, **проценты** в финансовых расчетах это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой форме

Проценты дискретные предполагают, что начисление процентов производится дискретно, т.е. в отдельные (обычно равноотстоящие) моменты времени, причем, в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц

Проценты непрерывные предполагают непрерывное начисление процентов во времени

Реинвестирование - неоднократное повторение процесса инвестирования суммы депозита вместе с начисленными на нее в предыдущем периоде процентами

Рента финансовая – см. **финансовая рента**

Рента верная - рента, члены которой подлежат безусловной выплате

Рента немедленная - рента, срок которой начинается немедленно

Рента отложенная или **отсроченная** - рента, начало срока которой запаздывает

Рента постнумерандо (или **обычная рента**) - рента, платежи которой осуществляются в конце каждого периода

Рента пренумерандо- рента, платежи которой осуществляются в начале каждого периода

Рента *p*-срочная - рента, предусматривающая p равных платежей в году

Рента условная - рента, выплата членов которой ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события

Рентабельность – отношение приведенных по ставке сравнения доходов к приведенным на ту же дату капиталовложениям

Сила роста δ представляет собой номинальную ставку процентов при $m \to \infty$, где m - число начислений процентов в году

Современная величина (**текущая стоимость**) суммы S - величина P, найденная дисконтированием

Современная величина потока платежей - сумма всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему

Срок окупаемости – продолжительность периода, в течение которого сумма чистых доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, равна сумме приведенных на этот же момент инвестиций

Срок ренты - время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода

Ставка номинальная - годовая ставка сложных процентов j при числе периодов начисления в году m. Тогда за каждый период проценты начисляют по ставке j/m

Ставка процентов номинальная учетная - сложная годовая учетная ставка f, применяется при дисконтировании m раз в году. Тогда в каждом периоде, равном $1/m$ части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке f/m

Ставка процентов простая - это ставка, которая применяется к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды

Ставка процентов сложная - это ставка, которая применяется к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами

Ставка процентов сложная учетная - дисконтирование по сложной годовой учетной ставке осуществляется по формуле $P=S(1-d_{сл})^n$, где $d_{сл}$ - сложная годовая учетная ставка, S - дисконтируемая величина, P - современная стоимость S, n - срок дисконтирования

Ставка учетная - ставка, применяемая для расчета процентов при учете векселей

Ставка эффективная - годовая ставка сложных процентов, приводящая к тому же финансовому результату, что и m -разовое наращение в год по ставке j/m, где j - номинальная ставка

Ставка эффективная учетная - сложная годовая учетная ставку, эквивалентная (по финансовым результатам) номинальной учетной ставке, применяемой при заданном числе дисконтирований в году m

Уравнение эквивалентности - уравнение, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо одному моменту времени, приравнивается сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате. Разрабатывается при изменении условий контракта

Учет, банковский или коммерческий учет - учет (покупка) векселей заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или др. платежному обязательству покупает его у владельца (кредитора) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом

Член ренты - величина каждого отдельного платежа ренты

Финансовая рента или **аннуитет** - поток платежей**,** все члены которого положительные величины, а временные интервалы постоянны

Формула наращения по простым процентам или, кратко, формулой простых процентов: $S=P(1+ni)$, где S - наращенная сумма, P - первоначальная сумма (ссуда), n - срок начисления процентов (срок ссуды), i - ставка процентов за единицу времени.

Форфейтная кредитная операция (операция а форфэ) – операция, в которой участвуют продавец, покупатель и банк-кредитор. Покупатель выписывает продавцу комплект векселей на сумму стоимости товара плюс проценты за кредит, сроки векселей равномерно распределены во времени. Продавец сразу же учитывает портфель векселей в банке без права оборота на себя. Банк, форфетируя сделку, берет весь риск на себя.

Чистый приведенный доход – разность дисконтированных на один момент времени показателей дохода и капиталовложений

Примерные темы исследовательских (курсовых, дипломных) работ

1. Анализ эффективности инвестиционных проектов и выработка стратегических решений.
2. Прогнозирование конъюнктуры финансового рынка и ее учет в финансовом менеджменте.
3. Изучение динамики и связи различных секторов финансового рынка России, как макроэкономического фактора финансового менеджмента.
4. Анализ и управление кредитными операциями на конкретном предприятии.
5. Анализ и корректировка инвестиционной деятельности конкретного инвестора.
6. Теории управления портфелем ценных бумаг и их применимость на российском фондовом рынке.
7. Анализ динамики котировок и доходности ГКО и управление структурой инвестиций.
8. Технический анализ на российском рынке ценных бумаг.
9. Анализ влияния мировых кризисных ситуаций на российский фондовый рынок.
10. Исследование связи отдельных ценных бумаг с конъюнктурой фондового рынка.
11. Арбитражные операции на валютном рынке.
12. Максимизация доходности депозита путем реинвестирования и применения конверсии валют.
13. Сравнение динамики валютных курсов и темпов инфляции на российском рынке.
14. Расчет реальной доходности портфеля ценных бумаг в условиях инфляции, накладных расходов и условий налогообложения.

ВЫЯВЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО УСТОЙЧИВЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ И ЛАГОВ НА РЫНКЕ ГКО И РЫНКЕ КОРПОРАТИВНЫХ ЦЕННЫХ БУМАГ.

15. Разработка алгоритмов и программ, подготавливающих проекты финансовых решений в стандартных ситуациях на основе имеющихся данных.

Приложение

Порядковые номера дней невисокосного года

Ден	Янв	Фев	Мар	Апр	Май	Июн	Июл	Авг	Сен	Окт	Ноя	Дек
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Литература

1. Четыркин Е.М. Финансовая математика. Учебник. –М., Дело, 2000.

2. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. -2-изд. испр. и доп. -М.: Дело Лтд, 1995. -320 с.

3.Кочович Е. Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов: Пер. с серб./ Предисл. Е.М.Четыркина. -М.: Финансы и статистика, 1995.

4.Ковалев В.В. Сборник задач по финансовому анализу: Учеб. пособие. -М.: Финансы и статистика, 1997.-128 с.

5.Ковалев В.В. Методы оценки инвестиционных проектов. –М., Финансы и статистика, 1998. –144 с.

6.Балабанов И.Т. Сборник задач по финансам и финансовому менеджменту. -М.: Финансы и статистика, 1997.-78 с.